PRÁCTICA 8

1. Encontrar los valores máximo y mínimo absolutos de f sobre el intervalo dado.

   a) $f(x) = 3x^2 - 12x + 5 \qquad [0, 3]$

   b) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x} \qquad [1/2, 2]$

   c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1} \qquad [0, 3]$

2. En cada una de las siguientes funciones, hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los valores máximo y mínimo locales, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

   a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

   b) $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$

   c) $f(t) = \operatorname{sen}^2 t \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

   d) $f(x) = \operatorname{sh} x$

   e) $f(x) = \dfrac{3x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$

3. De una pieza de cartón rectangular de lados $a = 25$ cm y $b = 10$ cm se cortan en las esquinas cuadrados de lados x para hacer una caja. ¿Cúal es el valor de x que hace máxima la capacidad de la caja?

4. a) Hallar dos números positivos cuya suma sea 110 y su producto el mayor posible.

   b) Hallar dos números positivos cuyo producto sea 192 y su suma la mínima posible.

5. Sea g una función con derivada segunda y tal que que $g(0) = 0$. Si f es la función:

   $$f(x) = g(5x^2) + xg(x)$$

   Calcular $f'(x)$ y probar que f tiene un extremo local en $x = 0$. Si además g es creciente y su derivada no se anula nunca, clasificar el extremo.

6. Para las siguientes funciones, hallar los puntos críticos y analizar cuáles de ellos son máximos locales, mínimos locales o puntos de ensilladura.

   a) $f(x, y) = (2x + 1 - y)^2$

   b) $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y + 1$

   c) $f(x, y) = 10x^2 + 10y^2 + 12xy + 2x + 6y + 1$

d) $f(x, y) = x^2 - y^2$

e) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x$

f) $f(x, y) = xy$

g) $f(x, y) = e^{1+x^2+y^2}$

h) $f(x, y) = \ln(2x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 1)$

i) $f(x, y) = x^2 e^{-y}$

j) $f(x, y) = \begin{cases} e^{1/x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

7. Hallar los extremos de $f|_A$ en los casos siguientes

   a) $f(x, y) = xy(x - y)^2$ $\quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > 0 \ , \ y > 0\}$

   b) $f(x, y) = xy(x - y)^2$ $\quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geqslant 0 \ , \ y \geqslant 0\}$

   c) $f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x$ $\quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x| \leqslant 3 \ , \ |y| \leqslant 3\}$

8. Una empresa produce ventanas del mismo tipo en dos plantas distintas. La función conjunta del costo de fabricación es $f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2 + 700$, donde x indica la cantidad de unidades producida en la primer planta e y las unidades producidas en la segunda planta. ¿Cuántas unidades se deben producir en cada planta a fin de minimizar los costos?

9. Hallar el punto de la parábola $y = 4x$ cuya distancia al $(1, 0)$ es mínima. Resolver el mismo problema reduciéndolo a trabajar con una función de una variable.

10. Hallar tres números positivos cuya suma sea 100 y cuyo producto sea mínimo.

11. Hallar los máximos y mínimos de la función $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1$ dentro del círculo unitario y en el borde.

12. Encontrar los extremos de f sujetos a las restricciones mencionadas

    a) $f(x, y) = x^2 - y^2$ $\quad x^2 + y^2 = 1$

    b) $f(x, y) = x - y$ $\quad x^2 - y^2 = 2$

    c) $f(x, y) = x^2 y$ $\quad x^2 + 2y^2 = 6$

13. Hallar los extremos locales de $f|_S$ en los siguientes casos

    a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x, y) = x^2 + y^2 \quad , \quad S = \{(x, 2) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$

    b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x, y) = x^2 + y^2 \quad , \quad S = \{(x, y) \ / \ y \geqslant 2\}$

Apéndice: Definiciones y Resultados

Extremos Libres

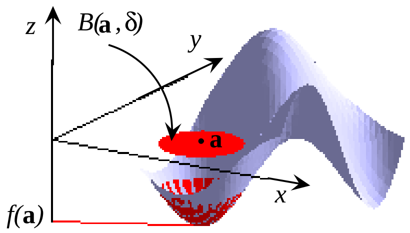
Extremos: máximos y mínimos

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, U abierto, $\mathbf{a} \in U$. Se dice que en $\mathbf{a}$

★ f tiene un ***mínimo local (resp.: estricto)*** si existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(\mathbf{a}) \leqslant f(\mathbf{x}) \qquad\qquad (\text{resp.:} \quad f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{x}))$$

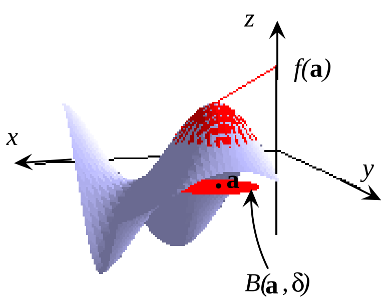
para todo $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \delta)$.



★ f tiene un ***máximo local (resp.: estricto)*** si existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(\mathbf{a}) \geqslant f(\mathbf{x}) \qquad\qquad (\text{resp.:} \quad f(\mathbf{a}) > f(\mathbf{x}))$$

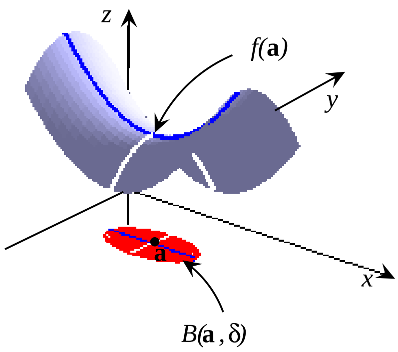
para todo $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \delta)$.



★ f tiene un ***extremo local*** si tiene un máximo o un mínimo local.

★ f tiene un ***punto crítico o estacionario*** si f es diferenciable en $\mathbf{a}$ y $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$.

★ f tiene un ***punto de ensilladura*** si en $\mathbf{a}$ hay un punto crítico que no es extremo.



Observación

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene un extremo local en el punto $\mathbf{a} \in U$ y $\mathbf{g} : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva tal que $\mathbf{g}(0) = \mathbf{a}$, entonces $f \circ \mathbf{g}$ tiene en 0 el mismo tipo de extremo y con el mismo valor que f.

En consecuencia,

★ si existe una curva $\mathbf{g}$ tal que $\mathbf{g}(0) = \mathbf{a}$ y $f \circ \mathbf{g}$ **no** tiene extremo en 0, entonces f **no** tiene extremo en $\mathbf{a}$.

★ si existen dos curvas $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ tales que $\mathbf{g}_i(0) = \mathbf{a}$, $f \circ \mathbf{g}_1$ tiene máximo local en 0 y $f \circ \mathbf{g}_2$ tiene mínimo local en 0, entonces f **no** tiene extremo en $\mathbf{a}$.

Proposición

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, U abierto. Todo punto donde hay un extremo de f es punto crítico.

Teorema

Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2, U abierto y $\mathbf{a} \in U$ un punto crítico de f.

a) Si para todo $\mathbf{x}$ en un entorno de $\mathbf{a}$, $Hf(\mathbf{x})$ es semidefinida negativa (resp.: positiva) entonces f tiene un máximo (resp.: mínimo) local en $\mathbf{a}$.

b) Si $Hf(\mathbf{a})$ es definida negativa (resp.: positiva) entonces f tiene un máximo (resp.: mínimo) local estricto en $\mathbf{a}$.

c) Si f tiene un máximo (resp. mínimo) local en $\mathbf{a}$, entonces $Hf(\mathbf{a})$ es semidefinida negativa (resp.: positiva).

Teorema *(Criterio de la derivada segunda)*

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2, U abierto. En $(a,b) \in U$ hay un

⋆ *mínimo local estricto* si se cumplen las siguientes condiciones:

a) $\nabla f(a,b) = 0$

b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$

c) $\det(MHf(a,b)) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\right)\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right) - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2 > 0$

⋆ *máximo local estricto* si se cumplen las siguientes condiciones:

a) $\nabla f(a,b) = 0$

b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$

c) $\det(MHf(a,b)) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\right)\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right) - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2 > 0$

⋆ *punto de ensilladura* si $\det(MHf(a,b)) < 0$.

Extremos Condicionados

Teorema

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, existen puntos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in K$ tales que

$$f(\mathbf{a}) \leqslant f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{b})$$

para todo $\mathbf{x} \in K$. Es decir, f alcanza su máximo y su mínimo valor en K.

Multiplicadores de Lagrange

Teorema *(Multiplicadores de Lagrange: una condición)*

Sean $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1, U abierto, $S = \{\mathbf{x} \in U \ / \ g(\mathbf{x}) = 0\}$ y $\mathbf{a} \in S \cap U$. Entonces, si

▹ $\nabla g(\mathbf{a}) \neq 0$ y

▹ $f|_S : S \cap U \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene un extremo local en $\mathbf{a}$

existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda \nabla g(\mathbf{a})$$

Proposición

Si al restringir f a una superficie S tiene un un extremo en $\mathbf{a}$, entonces $\nabla f(\mathbf{a})$ es perpendicular a S en $\mathbf{a}$.

Teorema *(Multiplicadores de Lagrange: m condiciones)*

Sean $f, g_1, \dots, g_m : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1, U abierto, $m \leqslant n$,

$$S = \{\mathbf{x} \in U \ / \ g_i(\mathbf{x}) = 0 \ , \ i = 1, \dots, m\}$$

y $\mathbf{a} \in S \cap U$. Entonces, si

- ▹ la matriz $\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})\right)$ tiene rango m y
- ▹ $f|_S : S \cap U \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene un extremo local en $\mathbf{a}$

existen $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{a})$$

Notación

Los números $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ se llaman ***multiplicadores de Lagrange*** y la función $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

se denomina ***función de Lagrange***.