PRÁCTICA 6

1. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones

   a) $f(x,y) = x^4 + 2xy + y^3x - 1$

   b) $f(x,y,z) = ye^x + z$

   c) $f(x,y) = \operatorname{sen} x$

   d) $f(x,y,z) = xyz + \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$

   e) $f(x,y,z) = z(\cos(xy) + \ln(x^2+y^2+1))$

   f) $f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$

   g) $f(x,y) = \cos(ye^{xy}) \operatorname{sen} x + 2x$

2. Calcular el gradiente en cada uno de los siguientes casos

   a) $f(x,y) = y \operatorname{sen} x + (x+2y)^7$

   b) $f(x,y) = ye^{x^2+3y}$

3. Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de las siguientes funciones en el origen:

   a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{is } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$

   b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ x & \text{si } y = 0 \end{cases}$

4. Hallar la ecuación del plano tangente al gráfico de la función en el punto indicado:

   a) $f(x,y) = 3x^2y + \dfrac{y}{x^2+1}$ en $(0,1)$

   b) $f(x,y) = 2xy + (3x^2+5y)^4$ en $(1,0)$

5. Estudiar la diferenciabilidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican y escribir la ecuación del plano tangente cuando éste exista.

a) $f(x, y) = xy + 1 - \operatorname{sen}(\frac{x^2}{2})$ en $(1, 5)$ y en $(2, 2)$

b) $f(x, y) = x^{1/4}y^{1/4}$ en $(16, 1)$

6. Calcular las derivadas parciales de segundo orden para las siguientes funciones, verificando la igualdad de las parciales mixtas en caso de ser de clase C^2.

a) $f(x, y) = x^3y + e^{xy^2} + \operatorname{arctg}(x^3 - 2xy)$

b) $f(x, y,) = e^x y + \dfrac{e^y}{x} + xy \operatorname{sen} z$

c) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + \ln z$

7. Sean $f(u, v) = \cos(uv)$, $u(x, y) = x + y$ y $v(x, y) = x - y$. Calcular $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(f(u(x, y), v(x, y)))$

(i) usando la regla de la cadena

(ii) sustituyendo

8. Sean $f(u, v) = u^2 + v^3 + 4u$ y $g(x, y) = x \operatorname{sen} y$. Dadas,

$$u(t) = t^2 - 1 \qquad v(t) = \operatorname{sen} t \qquad x(t) = \operatorname{sen} t \qquad y(t) = t$$

Calcular

$$\frac{d}{dt} f(u(t), v(t)) \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dt} g(x(t), y(t))$$

a) usando la regla de la cadena

b) sustituyendo

Apéndice: Definiciones y Resultados

Derivada parcial

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Si existe el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)}{h}$$

se dice que f ***es derivable respecto de*** x_j ***en el punto*** $\mathbf{x} \in U$. Otras notaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = f'_{x_j}(\mathbf{x}) = D_j f(\mathbf{x})$$

Gradiente de un campo escalar

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable respecto de cada una de sus variables. El vector

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right)$$

se llama ***gradiente de*** f ***en*** $\mathbf{x}$.

Proposición

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ derivables respecto de x_j en $\mathbf{a} \in U$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces, las funciones $\alpha f + \beta g$, fg y f/g (si $g(\mathbf{a}) \neq 0$) son derivables respecto de x_j en $\mathbf{a}$ y se tiene

(i) $\dfrac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \alpha \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) + \beta \dfrac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{a})$

(ii) $\dfrac{\partial(fg)}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = g(\mathbf{a}) \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) \dfrac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{a})$

(iii) $\dfrac{\partial(f/g)}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) g(\mathbf{a}) - \dfrac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{a}) f(\mathbf{a})}{(g(\mathbf{a}))^2}$

Diferenciabilidad

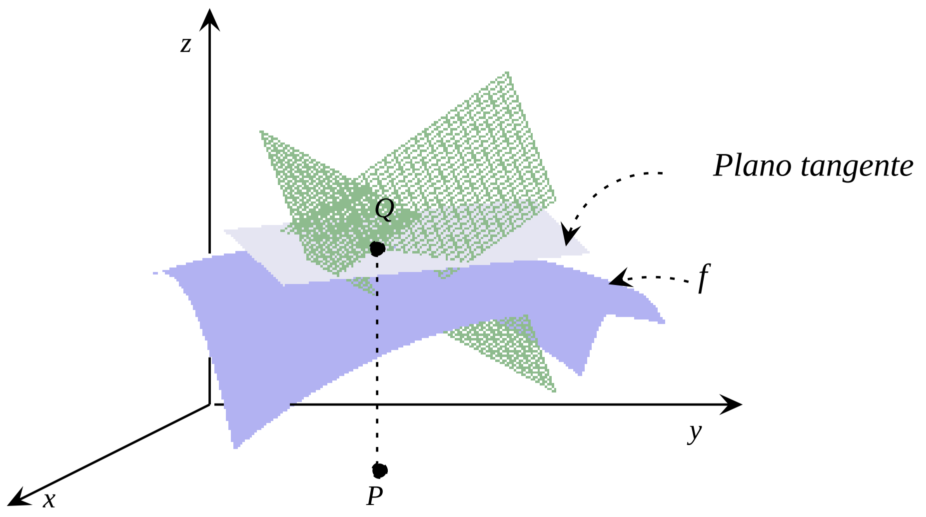
Las funciones derivables $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tienen la propiedad de que cada punto de su gráfico $(x_0, f(x_0))$ admite una recta tangente; es decir, entre todas las rectas $L : y = m(x - x_0) + f(x_0)$ que pasan por ese punto, hay sólo una –la que tiene pendiente $f'(x_0)$– que satisface que su gráfico y el de f están muy próximos cerca de x_0. Más precisamente,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)]}{x - x_0} = 0$$

Es decir, la diferencia entre la función $f(x)$ y la recta $f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ tiende a 0 más rápido que el incremento de la variable: $x - x_0$

Esto nos permite aproximar (alrededor de x_0) a una función derivable por una recta; esta aproximación será más precisa cuanto más cerca estemos del punto x_0.

Pretendemos generalizar esta situación a funciones $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. En este caso, dado que el gráfico será una superficie (en lugar de una curva), trataremos de ver qué condición debe cumplir la función en el punto (a, b) de modo de poder asegurar que, entre todos los planos que pasan por el punto de su gráfico $(a, b, f(a, b))$, haya uno que sea el que está más próximo al gráfico de f cerca de (a, b).



P=(a,b) *Q=(a,b,f(a,b))*

Cualquier plano (no vertical) que pase por $(a, b, f(a, b))$ tendrá ecuación

$$z = \alpha(x - a) + \beta(y - b) + f(a, b)$$

Necesitamos entonces encontrar α y β de modo que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y) - [\alpha(x - a) + \beta(y - b) + f(a, b)]}{\|(x - a, y - b)\|} = 0$$

El hecho que este límite doble exista y sea nulo nos dice que, en particular,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x, b) - [\alpha(x - a) + \beta(b - b) + f(a, b)]}{\|(x - a, b - b)\|} = 0$$

y

$$\lim_{y\to b} \frac{f(a, y) - [\alpha(a - a) + \beta(y - b) + f(a, b)]}{\|(a - a, y - b)\|} = 0$$

dado que si un límite doble existe, existen todos los límites radiales y valen lo mismo.

Tenemos por tanto,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x,b) - [\alpha(x-a) + f(a,b)]}{|x-a|} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{y\to b} \frac{f(a,y) - [\beta(y-b) + f(a,b)]}{|y-b|} = 0$$

Teniendo en cuenta que $\dfrac{x-a}{|x-a|}$ e $\dfrac{y-b}{|y-b|}$ tienen módulo 1, estos límites son equivalentes a

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x,b) - [\alpha(x-a) + f(a,b)]}{x-a} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{y\to b} \frac{f(a,y) - [\beta(y-b) + f(a,b)]}{y-b} = 0$$

Que pueden escribirse en la forma

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a} - \alpha = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{y\to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y-b} - \beta = 0$$

Esto nos dice que deben existir las derivadas parciales de f en el punto y que los valores de α y β son precisamente los de las derivadas parciales de f en el punto (a,b).

Resulta entonces que para que el plano [1] que estamos buscando aproxime al gráfico de f cerca de (a,b) deberá tener ecuación

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) + f(a,b)$$

Y en consecuencia, la condición que debe cumplir f en el punto (a,b) para que esto pase es que sea derivable parcialmente en el punto y que además

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)\right]}{\|(x-a, y-b)\|} = 0$$

Decimos que toda función que cumpla esta condición es ***diferenciable*** en (a,b). Resulta entonces, análogamente a lo que sucedía con las funciones derivables de una variable real, que una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es *diferenciable* en un punto si y sólo si su gráfico admite plano tangente en dicho punto.

Plano tangente al gráfico de una función

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $(a,b) \in U$. Entonces, el plano de ecuación

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

[1]Este plano se llama ***plano tangente*** al gráfico de f en (a,b).

se llama ***plano tangente al gráfico de f en*** (a, b).

La función $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$T(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\, u + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\, v =$$

es una transformación lineal que satisface

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y) - f(a, b) - T(x - a, y - b)}{||(x - a, y - b)||} = 0$$

Se la llama ***diferencial*** de f en (a, b) y se la denota por

$$T = df(a, b)$$

para hacer referencia al nombre de la función y al punto donde se cumple la condición de diferenciabilidad. De esta forma, $df(a, b) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es la única transformación lineal que satisface

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y) - f(a, b) - df(a, b)(x - a, y - b)}{||(x - a, y - b)||} = 0$$

Vamos a generalizar ahora estas definiciones

Función diferenciable

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, U abierto, y $\mathbf{x}_0 \in U$. Decimos que f es ***diferenciable en*** $\mathbf{x}_0$ si existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||} = 0$$

O, equivalentemente,

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{h})}{||\mathbf{h}||} = 0$$

Notación

En caso de existir, la transformación T de la definición anterior resulta ser única y recibe el nombre de ***diferencial de f en*** $\mathbf{x}$. Se la denota

$$T = df(\mathbf{x})$$

Proposición

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables en $\mathbf{x}_0 \in U$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces, las funciones $\alpha f + \beta g$, fg y f/g (si $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$) son diferenciables en $\mathbf{x}_0$ y se tiene

(i) $d(\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}_0) = \alpha df(\mathbf{x}_0) + \beta dg(\mathbf{x}_0)$

(ii) $d(fg)(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x}_0)df(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0)dg(\mathbf{x}_0)$

(iii) $d(f/g)(\mathbf{x}_0) = \dfrac{1}{(g(\mathbf{x}_0))^2}\,[g(\mathbf{x}_0)df(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)dg(\mathbf{x}_0)]$

Proposición

Toda función diferenciable es continua.

Regla de la cadena

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $\mathbf{x}_0$.

⋆ Primera Versión: Si $\mathbf{g} : (a,b) \longrightarrow U$ es derivable en $t_0 \in (a,b)$ tal que $\mathbf{g}(t_0) = \mathbf{x}_0$, la función $f \circ \mathbf{g} : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en t_0 y

$$(f \circ \mathbf{g})'(t_0) = df(\mathbf{g}(t_0))(\mathbf{g}'(t_0)) =$$

Ejemplo

Sean $f(x,y) = x^2 - y^3$ y $\mathbf{g}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$. Ambas cumplen las hipótesis de diferenciabilidad que requiere la regla de la cadena, por lo tanto

$$(f \circ \mathbf{g})'(t) = (2\operatorname{sen} t, -3\cos^2 t) \cdot (\cos t, -\operatorname{sen} t) = 2\operatorname{sen} t \cos t + 3\cos^2 t \operatorname{sen} t$$

¿De qué otra manera podría haber calculado $(f \circ \mathbf{g})'(t)$?

⋆ Segunda Versión: Si $g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $f(\mathbf{x}_0) \in (a,b)$ se tiene que $g \circ f$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y

$$d(g \circ f)(\mathbf{x}_0) = g'(f(\mathbf{x}_0))df(\mathbf{x}_0)$$

esta es una igualdad entre funciones

Dicho en términos de gradientes se expresa en la forma

$$\nabla(g \circ f)(\mathbf{x}_0) = g'(f(\mathbf{x}_0))\nabla f(\mathbf{x}_0)$$

Ejemplo

Sean $g(t) = e^{7t}$ y $f(x,y) = x^2 + y$. También en este caso ambas funciones cumplen las hipótesis de la regla de la cadena, con lo cual

$$\nabla(g \circ f)(x,y) = g'(f(x,y))\nabla f(x,y) = 7e^{7x^2+7y}\,(2x,1) = (14x\,e^{7x^2+7y}, 7e^{7x^2+7y})$$