PRÁCTICA 4

1. Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1}$

   b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{(x+1)^4 - 16)}{x^2 - 5x + 4}$

   c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$

   d) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$

   e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+6} - -3}{\sqrt{4x+4} - 4}$

   f) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - x^2}{1 - \sqrt{x}}$

2. Si $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$, ¿es cierto que existe un entorno de 1 para el cual $f(x) < 3$?

   ¿Y que existe un entorno de 1 para el cual $f(x) < 2$? Justificar

3. ¿Tiene sentido buscar un $\delta > 0$ tal que:

   a) $3x^2 - 5x + 1 > 0$ en $(1 - \delta, 1 + \delta)$?

   b) $1 - x^2 > 0$ en $\left(\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta\right)$?

   Si la respuesta es afirmativa, hallarlo.

4. Demostrar cada una de las siguientes afirmaciones empleando la definición de límite.

   a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x}{5} = \dfrac{4}{5}$

   b) $\lim_{x\to 3} 2x^2 - 6 = 12$

5. Calcular:

   a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{5x}$

   b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}$

   c) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \log(x^2+3) - \log(x^2+2)$

   d) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{\log(1+e^x)}{x}$

   e) $\displaystyle \lim_{x\to 0} (1+x)^{1/\operatorname{tg} x}$

   f) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x + \operatorname{sen} x}{e^x + \cos x}$

6. Encontrar el límite, si existe. Si no lo hay, explicar por qué.

   a) $\displaystyle \lim_{x\to -4^-} \frac{|\, x+4 \,|}{x+4}$

   b) $\displaystyle \lim_{x\to -4} \frac{|\, x+4 \,|}{x+4}$

   c) $\displaystyle \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)^2}{|\, x-1 \,|}$

   d) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{|\, x-1 \,|}$

   e) $\displaystyle \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$

   f) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x(e^x - 1)}{|\, x \,|}$

7. Para cada una de las siguientes funciones

   ◇ estudiarla en cada punto de su dominio

   ◇ en los puntos que no pertenezcan al dominio, definirla —si es posible— de modo que resulte continua

   a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & , \ |x| \leqslant 1 \\ |x-1| & , \ |x| > 1 \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & , \ x < 0 \\ -x^2 + \frac{5}{2}\, x & , \ x > 1 \end{cases}$

   c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2} & , \ x > 0 \\ x^2 + 1 & , \ x \leqslant 0 \end{cases}$

   d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(e^2 x)}{x} & , \ x < 0 \\ (1+2x)^{1/x} & , \ 0 < x < 1 \\ \dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3} + 5 & , \ x > 1 \end{cases}$

8. a) Probar que existe $x \in (1,2)$ tal que $x^3 - 3x + 1 = 0$.

   b) Probar que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x = x$.

   c) Encontrar un número r tal que $f(x) = x^9 - 100x^4 + 3x^3 + 12$ tenga al menos una raíz real en el intervalo $(-r, r)$.

9. Analizar la existencia de los límites de las siguientes funciones en el origen:

   a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

   b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

   c) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{y}$

   d) $f(x,y) = y \operatorname{sen}(\frac{x}{y})$

   e) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

   f) $f(x,y) = (x^2+y^2) \operatorname{sen}(\frac{1}{xy})$

10. Probar por definición que

    a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} x + y = 1$

    b) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,9)} xy = -9$

11. Analizar la continuidad de las siguientes funciones

    a) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x - y)}{x - y} & \text{si} \quad x \neq y \\ 1 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$

    b) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

    c) $f(x, y) = |y|$

Apéndice: Definiciones y Resultados

Campo escalar

Llamaremos ***campo escalar*** a cualquier función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Límite — Continuidad

Límite

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar, $\mathbf{a} \in \overline{A}$ y $\ell \in \mathbb{R}$, decimos que el ***límite de*** f ***cuando*** $\mathbf{x}$ ***tiende a*** $\mathbf{a}$ es ℓ —y lo notamos $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell$— cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{x} \in A \quad \text{y} \quad 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(\mathbf{x}) - \ell| < \varepsilon$$

Proposición (*Unicidad del límite*)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar y $\mathbf{a} \in \overline{A}$. Si $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell_1$ y $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell_2$, entonces $\ell_1 = \ell_2$.

Proposición

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar, $\mathbf{a} \in \overline{A}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell > \alpha$ (resp. $\ell < \alpha$), entonces $f(\mathbf{x}) > \alpha$ (resp. $f(\mathbf{x}) < \alpha$) para $\mathbf{x}$ en un entorno de $\mathbf{a}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$.

Proposición

Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \overline{A}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces, si $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell_1$ y $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \ell_2$,

(i) $\lim\limits_{x\to a} (\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}) = \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$

(ii) $\lim\limits_{x\to a} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = \ell_1\ell_2$

(iii) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2} \quad$ (si $\ell_2 \neq 0$)

Proposición

Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in A$ tales que $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = 0$ y f es acotada en un entorno de $\mathbf{a} \in A$. Entonces,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = 0$$

Proposición

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{a} \in \overline{A}$ tales que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell$. Sean $\varepsilon > 0$, $h : (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{y\to\ell} h(y) = L$ y $\mathbf{g} : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \longrightarrow B(\mathbf{a}, r)$ tal que $\lim_{t\to t_0} \mathbf{g}(t) = \mathbf{a}$. Entonces,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} h \circ f(\mathbf{x}) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to t_0} f \circ \mathbf{g}(t) = \ell$$

Proposición

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{a} \in \overline{A}$. Entonces, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(x) = \ell$ si y sólo si

$$f(x_n, y_n) \longrightarrow \ell$$

para toda sucesión $((x_n, y_n)) \subset A$, $(x_n, y_n) \neq \mathbf{a}$, que converge a $\mathbf{a}$.

Nota: lo mismo vale para $A \subset \mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}$).

Corolario

Si $((x_n, y_n))$, $((u_n, v_n))$ son dos sucesiones que convergen al punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ para las cuales

$$f(x_n, y_n) \longrightarrow \ell_1 \qquad \text{y} \qquad f(u_n, v_n) \longrightarrow \ell_2$$

con $\ell_1 \neq \ell_2$, entonces no existe el límite de f cuando $(x, y) \to (a, b)$.

Nota: lo mismo vale en $\mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}$).

Proposición *(límite de una composición)*

Sean $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\mathbf{a} \in \overline{A}$ tales que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell$. Entonces,

(i) si la función h está definida en un entorno del número ℓ, toma valores en $\mathbb{R}$ y satisface $\lim_{y\to\ell} h(y) = L$, se tiene

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} h \circ f(\mathbf{x}) = L$$

(ii) si la trayectoria $\mathbf{g}$ está definida en un entorno del número t_0 y satisface $\lim_{t\to t_0} \mathbf{g}(t) = \mathbf{a}$, se tiene

$$\lim_{t\to t_0} f \circ \mathbf{g}(t) = \ell$$

Corolario

Si $\mathbf{g}_1 : (-1.1) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{g}_2 : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfacen que

$$\lim_{t\to 0} \mathbf{g}_1(t) = \mathbf{a} = \lim_{t\to 0} \mathbf{g}_2(t) \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to 0} f\circ \mathbf{g}_1(t) = \ell_1 \neq \ell_2 = \lim_{t\to 0} f\circ \mathbf{g}_2(t)$$

entonces no existe $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$.

Continuidad

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f es ***continua*** en $\mathbf{a} \in A$ si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.
Se dice que f es ***continua*** en A si es continua en cada uno de sus puntos.

Proposición

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{a} \in A$. Entonces, f es continua en $\mathbf{a}$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{x} \in A \quad \text{y} \quad \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon$$

Proposición

Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas en $\mathbf{a} \in A$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces,

(i) $\alpha f + \beta g$ es continua en $\mathbf{a}$

(ii) fg es continua en $\mathbf{a}$

(iii) $\dfrac{f}{g}$ es continua en $\mathbf{a}$ siempre que $g(\mathbf{a}) \neq 0$

(iv) si $h : (f(\mathbf{a}) - \varepsilon, f(\mathbf{a}) + \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $f(\mathbf{a})$, $h \circ f$ es continua en $\mathbf{a}$.

Teorema *(Bolzano)*

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y $A \subset \mathbb{R}^n$ conexo por arcos. Si f toma un valor positivo y otro negativo, entonces existe $\mathbf{a} \in A$ tal que $f(\mathbf{a}) = 0$.

Corolario

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y $A \subset \mathbb{R}^n$ conexo por arcos. Si $f(\mathbf{x}) \neq 0$ para todo $\mathbf{x} \in A$, entonces

$$f > 0 \quad \text{en } A \qquad \text{o} \qquad f < 0 \quad \text{en } A$$

Teorema *(de los valores intermedios)*

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y $A \subset \mathbb{R}^n$ conexo por arcos. Si $f(\mathbf{x}_1) = a$, $f(\mathbf{x}_2) = b$ y $a < c < b$, entonces existe $\mathbf{x}_0 \in A$ tal que $f(\mathbf{x}_0) = c$.

Teorema *(Weierstrass)*

Sea $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Entonces f resulta acotada y además existen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ tales que

$$f(\mathbf{x}_1) \leqslant f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}_2)$$

para todo $\mathbf{x} \in K$; es decir, f alcanza un valor máximo absoluto –$f(\mathbf{x}_1)$– y un valor mínimo absoluto –$f(\mathbf{x}_2)$– en el conjunto K.