

PRÁCTICA 1

1. Resolver las siguientes desigualdades y representar el conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ que las satisfacen en la recta.

a) $x - 10 > 2 - 2x$

b) $2x + 1 > 10 - 6x$

c) $7x - 2 \leq 2x + 1$

d) $-5 < x - 4 < 2 - x$

e) $\frac{5+x}{5-x} \leq 2$

f) $\frac{3x-5}{2x+4} > 1$

g) $0 < \frac{2x-1}{x-1} < 1$

h) $x(x-1) < 0$

i) $2x^2 - 2 \geq x^2 - x$

2. Hallar el conjunto de números reales que satisfacen cada una de las condiciones siguientes y representar dicho conjunto sobre la recta

a) $|2 - x| < 2$

b) $|2x - 1| \leq 2$

c) $|4x - 12| > 4$

d) $|x - 1| < |x + 3|$

e) $\frac{|x-1|}{x+2} \geq 4$

f) $\frac{|x-1|}{-x} < 3$

g) $|x+1|^2 = |x+1| + 2$

h) $\frac{15-3x}{2-|x+3|} < 0$

3. Representar los siguientes conjuntos en la recta real:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq x^2\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} : |x+3| + |x-9| > 2\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} : ||x+2| - |x-1|| < 1\}$

4. Sea $a \geq 0$. Determinar para qué valores de b se verifican cada una de las siguientes condiciones:

a) $|a + b| = |a| + |b|$

b) $|a - b| < |a| + |b|$

c) $||a| - |b|| = |a - b|$

5. Sean a y b números reales. Decidir para qué valores de a y de b son válidas cada una de las siguientes afirmaciones:

a) $a < a^2$

b) $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$

c) $a > 0 \Rightarrow ab \geq b$

d) $a + b \geq \max\{a, b\}$

6. Sean $0 \leq x \leq y$. Probar que: $x \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq y$.

7. a) Mostrar que los siguientes conjuntos están acotados

$$\{n \in \mathbb{N} / 3 \leq n < 59\} \quad , \quad \left\{ \frac{1}{x^2 + 1} / x \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados superiormente

$$\mathbb{R}_{>0} \quad , \quad \{m^2 / m \in \mathbb{N}\}$$

c) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados inferiormente

$$\mathbb{Z} \quad , \quad \{x^{-1} / x < 0\} \quad , \quad \{-x^2 + 2x + 1 / x \in \mathbb{R}\}$$

8. Sean A, B subconjuntos no vacíos de números reales. Probar

a) $A \subset B$ y B acotado superiormente $\implies \sup A \leq \sup B$

b) $A \subset B$ y B acotado inferiormente $\implies \inf B \leq \inf A$

c) $A \subset B$ y A no acotado $\implies B$ no acotado.

9. Sea A un subconjunto no vacío de números reales. Comprobar que

a) si $\alpha < \sup A$, entonces existe $a \in A$ tal que $\alpha < a$

b) si $\beta > \inf A$, entonces existe $b \in A$ tal que $b < \beta$.

10. Calcular supremo e ínfimo —si existen— y probar que lo son, de los siguientes conjuntos

a) $\{n \in \mathbb{N} / 20 < n \leq 35\}$

b) $(a, b]$

c) $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} / n \in \mathbb{N} \right\}$

d) $\left\{ \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}, n \geq 30 \right\}$

e) $\left\{ \frac{2n}{7n-3} / n \in \mathbb{N} \right\}$

f) $\{x \in \mathbb{Q} / 2x^3 - 1 < 15\}$

g) $\{x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} / x^2 + x < 2\}$

11. PARTE ENTERA

Dado $a \in \mathbb{R}$ se define

$$[a] = \max\{m \in \mathbb{Z} / m \leq a\}$$

Probar

a) $[a] \leq a < [a] + 1$

b) $[a] = a \iff a \in \mathbb{Z}$

c) Sea $m \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$m \leq a < m + 1 \implies [a] = m$$

d) Calcular: $[3, 9]$, $[20, 18742]$, $[0, 39]$, $[-1]$, $[-1, 3]$, $[-\pi]$

APÉNDICE: DEFINICIONES Y RESULTADOS

Propiedades básicas de los números reales

1. $a + b = b + a$
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que $a + 0 = a$
4. Para cada $a \in \mathbb{R}$ existe $-a \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = 0$
5. $ab = ba$
6. $a(bc) = (ab)c$
7. Existe $1 \in \mathbb{R}$ $-1 \neq 0$ tal que $a \cdot 1 = a$
8. Para cada $a \neq 0$ existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $aa^{-1} = 1$
9. $a(b + c) = ab + ac$
10. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, vale una y sólo una de las siguientes afirmaciones
$$a = b \quad , \quad a < b \quad , \quad b < a$$
11. Si $a < b$ y $b < c$, $a < c$
12. Si $a < b$ y $c \in \mathbb{R}$, $a + c < b + c$
13. Si $a < b$ y $0 < c$, $ac < bc$

Módulo — Valor Absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propiedades del módulo

1. $|x| \geq 0$
2. $-|x| \leq x \leq |x|$
3. $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$
4. $|xy| = |x||y|$
5. $|x + y| \leq |x| + |y|$
6. $|x - y| \geq ||x| - |y||$
7. $|x - a| = \begin{cases} x - a & \text{si } x \geq a \\ -x + a & \text{si } x < a \end{cases}$

Distancia

Dados $x, y \in \mathbb{R}$ se llama distancia entre los números x e y al número

$$d(x, y) = |x - y|$$

Raíz n -ésima

★ Si n es par, la raíz n -ésima de un número *positivo* x es el **único número positivo** $\sqrt[n]{x}$ que satisface $(\sqrt[n]{x})^n = x$

★ Si n es impar, la raíz n -ésima de un número $x \in \mathbb{R}$ es el único número que satisface $(\sqrt[n]{x})^n = x$

Cota superior de un conjunto

Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío. Decimos que el número α es una **cota superior** de A si

$$x \leq \alpha \quad \text{para todo } x \in A$$

Cota inferior de un conjunto

Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío. Decimos que el número β es una **cota inferior** de A si

$$x \geq \beta \quad \text{para todo } x \in A$$

Conjunto acotado

Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío. Decimos que

- A está **acotado superiormente** si tiene una cota superior
- A está **acotado inferiormente** si tiene una cota inferior
- A está **acotado** si está acotado superior e inferiormente.

Supremo — Máximo

Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente. Un número α se llama **supremo de** A si

- α es cota superior de A
- si a es cota superior de A , entonces $a \geq \alpha$.

Se lo denota: $\sup A$. En caso que $\alpha \in A$, se lo llama **máximo** y se lo denota $\max A$.

Infimo — Mínimo

Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente. Un número β se llama **infimo de** A si

- β es cota inferior de A
- si b es cota inferior de A , entonces $b \leq \beta$.

Se lo denota: $\inf A$. En caso que $\beta \in A$, se lo llama **mínimo** y se lo denota $\min A$.

Axioma de Completitud

Todo subconjunto de los números reales que sea no vacío y acotado superiormente tiene supremo.

Proposición

Sea A un conjunto acotado superiormente y no vacío. Un número real α es el supremo de A si y sólo si

- α es cota superior de A
- para cada $\varepsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $\alpha - \varepsilon < x$.

Proposición

Sea A un subconjunto de números reales acotado inferiormente, entonces existe $\inf A$.

Proposición (Principio de Arquímedes)

Dado $x \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq x$.

Corolario

Sean a y b números reales tales que $0 < a < b$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.

Proposición (Densidad de \mathbb{Q})

Dados dos números reales $a < b$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$a < q < b$$

Proposición (Densidad de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$)

Dados dos números reales $a < b$, existe $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tal que

$$a < x < b$$

Proposición (Parte Entera)

Dado $x \in \mathbb{R}$, existe un único $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$m \leq x < m + 1$$

Nota: este número m se llama **parte entera de** x y se lo denota $[x]$.