

MAESTRÍA EN ESTADÍSTICA MATEMÁTICA.
COMPLEMENTOS DE ANÁLISIS.
SEGUNDO CUATRIMESTRE DE 2011.

E J E R C I C I O S A D I C I O N A L E S . 2

1. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - xy}{x + y} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Hallar $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$

b) Estudiar la existencia de límite

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

2. Sea $f(x, y) = (x - y)\sin(3x + 2y)$. Calcular en el punto $(0, \frac{\pi}{3})$ todas las derivadas parciales hasta el segundo orden.

3. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Verificar que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$

4. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Probar que f admite derivadas direccionales en el origen para todo vector unitario $u \in \mathbb{R}^2$ pero no es continua en el origen.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} 2(x - 1) + \frac{(x-1)y^2}{2(x-1)^2 + |x|y^2} & \text{si } (x, y) \neq (1, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (1, 0) \end{cases}$$

Estudiar la continuidad, la existencia de las derivadas parciales y la diferenciabilidad de f en el punto $(1, 0)$.

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x(e^{axy}-1)}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) Determinar todos los valores de a para los cuales la derivada direccional de f en el punto $(0, 0)$ y en la dirección $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ es $\sqrt{2}$
- b) Para los valores de a encontrados, hallar $\nabla f(0, 0)$ ¿Es diferenciable f en $(0, 0)$?

7. Demostrar que existe $c \in (a, b)$ ($a < b$) tal que

$$\frac{\operatorname{sen}(b) - \operatorname{sen}(a)}{\cos(a) - \cos(b)} = \cot(c).$$

Considere $a = 0$ y $b = x$ para hallar c en función de x .

8. Demostrar que

- a) Si $0 < a < b$ entonces

$$1 - \frac{a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b}{a} - 1$$

- b) Usar la desigualdad del ítem anterior para probar que

$$\frac{1}{6} < \ln(1, 2) < \frac{1}{5}$$

9. Para cada una de las siguientes funciones hallar $\frac{\partial f}{\partial r}$ y $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ en cada uno de los puntos donde las derivadas parciales existan: a) usando la regla de cadena y b) sustituyendo.

- a) $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$; $x(r, \theta) = r + \theta$, $y(r, \theta) = r - \theta$.
- b) $f(x, y) = \sqrt{25 - 5x^2 - 5y^2}$; $x(r, \theta) = r \cos(\theta)$, $y(r, \theta) = r \operatorname{sen}(\theta)$.
- c) $f(x, y, z) = \frac{xz}{x}$; $x(r, \theta) = \theta^2$, $y(r, \theta) = r + \theta$; $z(r, \theta) = r - \theta$

10. (*) Sean $f, g : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($B := B_r(0)$ la bola abierta de centro $(0, 0)$ y radio $r > 0$) diferenciables. Probar que

- a) Si f es constante en B entonces $\nabla f(a, b) = (0, 0)$ para todo $(a, b) \in B$
- b) Si $\nabla f(a, b) = (0, 0)$ entonces f es constante en B (Sugerencia: Usar el Teorema de Valor Medio)
- c) Si $\nabla f(a, b) = \nabla g(a, b)$ en todo punto $(a, b) \in B$ entonces $g(x, y) = f(x, y) + c$ para todo $(x, y) \in B$

11. Demostrar que:

a) Existe $c \in (0, x)$ tal que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5(1+c^2)}.$$

b) Utilizar el ítem anterior para calcular aproximadamente $\ln(1,1)$ y estimar el error cometido.

12. Para cada una de las siguientes funciones hallar, en el punto indicado, el polinomio de Taylor de segundo orden y dar la expresión del resto correspondiente

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$

b) $f(x, y) = e^{x+y}$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$

c) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$

d) $f(x, y) = e^x \operatorname{sen}(y)$, $(x_0, y_0) = (2, \frac{\pi}{4})$

e) $f(x, y) = x + xy + 2y$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$

13. Justificar a través del Teorema de Taylor que

$$\frac{\cos(x)}{\cos(y)} \approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

para valores de $|x|$ y $|y|$ suficientemente pequeños.

14. Sean $f(x, y) = (x + 1, 2y - e^x)$ y $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables de forma tal que el Polinomio de Taylor de orden 2 de $g \circ f$ en $(0, 0)$ es

$$P(x, y) = 4 + 3x - 2y - x^2 + 5xy.$$

Calcular $\nabla g(1, -1)$