

## PRÁCTICA 1 -REALES: SUCESSIONES Y SUPREMOS-

*“Não se pode esperar aprender Matemática contemplativamente. Apelo, portanto, ao leitor para que tente resolver os exercícios que lhe pareçam mais atraentes e/ou desafiadores. [...] Procure ler o enunciado de cada um. E boa sorte na viagem que ora inicia.”*

LAGES LIMA.

**Ejercicio 1.**

Para cada  $x \in \mathbb{R}$  se define  $A_x = \{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$ .

- i) Verificar que  $A_x \neq \emptyset$  y es acotado superiormente. Concluir que existe el máximo de  $A_x$ . Este número se llama la *parte entera de  $x$*  y se notará  $[x]$ .
- ii) Demostrar que:
  - a)  $0 \leq x - [x] < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .
  - b)  $[x] = x \iff x \in \mathbb{Z}$ .
  - c)  $[x + y] \leq [x] + [y] + 1$ .
  - d)  $x < y \Rightarrow [x] \leq [y]$ .

**Ejercicio 2.**

- i) Sean  $x, y \in \mathbb{R}$  tales que  $y - x > 1$ . Mostrar que existe un entero  $k$  tal que  $x < k < y$ .
- ii) Sean  $x, y \in \mathbb{R}$  tales que  $x < y$ . Mostrar que existe  $r \in \mathbb{Q}$  tal que  $x < r < y$ .
- iii) Sean  $r, s \in \mathbb{Q}$  tales que  $r > s$ . Mostrar que existe un número irracional entre  $r$  y  $s$ .
- iv) Sean  $x, y \in \mathbb{R}$  tales que  $x < y$ . Mostrar que existe un número irracional entre  $x$  e  $y$ .

**Ejercicio 3.**

- i) Probar que para cada  $x \in \mathbb{R}$ , existe una sucesión  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$  estrictamente decreciente tal que  $q_n \geq x$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = x$ .
- ii) Enunciar y probar un enunciado análogo donde  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sea estrictamente creciente.

**Ejercicio 4.** Sean  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  y  $\varepsilon > 0$ . Mostrar que existe  $q = (q_1, \dots, q_m) \in \mathbb{Q}^m$  tal que  $\|x - q\| = \left(\sum_{i=1}^m (x_i - q_i)^2\right)^{1/2} < \varepsilon$ .

**Ejercicio 5.** Sea  $A = \left\{ \frac{m}{2^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ . Probar que  $A$  es denso en  $\mathbb{R}$ .

Analizar la misma situación para el conjunto  $B = \left\{ \frac{m}{b^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ , donde  $b \in \mathbb{R}_{>0}$ .

**Ejercicio 6.** Sean  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sucesiones de números reales tales que

- i)  $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, a_n \leq b_n \leq c_n$ ;
- ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \ell$ .

Probar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \ell$ .

**Ejercicio 7.**

- i) Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión monótona. Probar que:
- Si existe una subsucesión  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  convergente a  $\ell \in \mathbb{R}$ , entonces  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $\ell$ . ¿Qué pasa si la subsucesión tiende a  $\infty$ ?
  - $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge  $\iff (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es acotada.
- ii) Demostrar que cualquier subsucesión de una sucesión convergente es también convergente.
- iii) Encontrar una sucesión **no** convergente  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que verifique  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a_{n+1}| = 0$ .
- iv) Analizar la situación del inciso anterior pero con la condición:  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a_{n+p}| = 0$  para todo  $p \in \mathbb{N}$  y estudiar si la respuesta contradice algún resultado conocido.

**Ejercicio 8.** Mostrar que en un cuerpo totalmente ordenado arquimediano son equivalentes las afirmaciones siguientes (¿dónde se usa la arquimedianoidad?):

- toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente;
- toda sucesión de Cauchy es convergente;
- si  $(I_n)_{n \geq 1}$  es un encaje de intervalos cerrados cuyas longitudes tienden a cero, entonces existe un único  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ ;
- todo conjunto acotado superiormente y no vacío tiene supremo;
- toda sucesión monótona y acotada superiormente tiene supremo.

**Ejercicio 9.** Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión acotada de números reales. Para cada  $n \in \mathbb{N}$  se considera  $A_n = \{a_k : k \geq n\}$ . Sean  $\lambda_n = \sup A_n$  y  $\gamma_n = \inf A_n$ .

- Probar que  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es decreciente y  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es creciente. Concluir que  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  son sucesiones convergentes. Al límite de la sucesión  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (resp.  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ) lo llamaremos *límite superior* (resp. *límite inferior*) de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y lo notaremos  $\limsup a_n$  (resp.  $\liminf a_n$ ).
- Sean  $\alpha = \liminf a_n$  y  $\beta = \limsup a_n$ , y sea  $\varepsilon > 0$ . Probar que a la derecha de  $\beta + \varepsilon$  y a la izquierda de  $\alpha - \varepsilon$  existen finitos términos de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . ¿Vale la recíproca?

**Ejercicio 10.** Hallar los límites superior e inferior de las siguientes sucesiones:

- 1, 3, -1, 1, 3, -1, 1, 3, -1, ...
- $(-1)^n \left(2 + \frac{3}{n}\right)$ .
- $\left(1 - \frac{1}{n}\right) \operatorname{sen} \left(n \frac{\pi}{2}\right)$ .
- $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definida por:  $s_1 = 0$ ,  $s_{2n} = \frac{s_{2n-1}}{2}$ ,  $s_{2n+1} = \frac{1}{2} + s_{2n}$ .
- $\frac{n}{3} - \left[\frac{n}{3}\right]$ .

**Ejercicio 11.**

- i) Encontrar una sucesión  $(x_n) \subset \mathbb{R}$  tal que  $\liminf x_n = -3$ ,  $\limsup x_n = 5$  y el conjunto  $\{x_n / n \in \mathbb{N}\}$  sea infinito.
- ii) ¿Es cierto que
- si  $\limsup x_n = 2$ , entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n > 1,99$  para todo  $n \geq n_0$ ?
  - si  $\limsup x_n = b$ , entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \leq b$  para todo  $n \geq n_0$ ?

**Ejercicio 12.** Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números reales acotada.

- i) Probar que  $\alpha = \limsup a_n$  si y sólo si para cada  $\varepsilon > 0$  se verifica:
- $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0, a_n < \alpha + \varepsilon$ ;
  - $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \geq n$  tal que  $a_m > \alpha - \varepsilon$ .
- ii) Demostrar que  $\alpha = \limsup a_n$  si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:
- Existe una subsucesión  $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  tal que  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j} = \alpha$ ;
  - si  $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  es una subsucesión convergente, entonces  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j} \leq \alpha$ .

**Ejercicio 13.** Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ . Probar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$  si y sólo si  $\limsup a_n = \liminf a_n = \ell$ .**Ejercicio 14.** Sean  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sucesiones reales acotadas. Probar que:

- $\limsup (a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$ .
- $\limsup (a_n \cdot b_n) \leq \limsup a_n \cdot \limsup b_n$ , si  $a_n, b_n \geq 0$ .
- Si  $c > 0$  entonces,  $\limsup (c \cdot a_n) = c \cdot \limsup a_n$ .

Enunciar y probar resultados análogos para  $\liminf$ .

**Ejercicio 15.** Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$ .

- Probar que:  $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$ .
- Deducir que si existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \in \mathbb{R}_\infty$  entonces,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = A$ .
- Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ .

**Ejercicio 16.** Sean  $x, y \in \mathbb{R}$  y  $(x_i)_{i \geq 0}, (y_j)_{j \geq 0}$  desarrollos de ambos en base  $b > 1$ . Se supone que el desarrollo de  $y$  es infinito, i.e., para todo  $n \in \mathbb{N}$  existe  $i > n$  con  $y_i > 0$ .

- Probar que si  $x_i = y_i$  para todo  $i \leq n - 1$  y  $x_n < y_n$ , entonces  $x < y$ .
- Deducir que el orden entre  $x$  e  $y$  es el mismo que el de los primeros términos en que difieren sus desarrollos.
- Manteniendo las hipótesis de i), sea  $z \in [x, y]$ . Probar que entonces  $z$  tiene un desarrollo en base  $b$  con  $z_i = x_i = y_i$  para todo  $i \leq n - 1$ .

**Ejercicio 17.** Hallar el desarrollo en base 2, 3 y 16 de los números 2,25; 10,7; 27 y 255.