Práctica 9 -Teoremas de Punto Fijo-

Ejercicio 1. Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $f : X \to X$. Probar que la condición

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \qquad \forall\, x, y \in X, \qquad x \neq y,$$

no es suficiente para garantizar la existencia de un punto fijo de f, pero que sí lo es si X es compacto.

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $|f'(x)| \leq \alpha < 1$. Probar que f tiene un único punto fijo.

Ejercicio 3. Considere la siguiente ecuación integral no lineal,

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y; f(y))dy + \varphi(x),$$

con K y φ continuas, tal que K satisface la condición de Lipschitz en la tercer variable:

$$|K(x, y; z_1) - K(x, y; z_2)| \leq M|z_1 - z_2|.$$

Probar que la ecuación integral tiene solución única para todo

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b - a)}.$$

Muestre una sucesión que converja a la solución.

Ejercicio 4. Sea $f : [0, T] \times \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua y Lipschitz en la segunda variable.

i) Probar que $y \in (C[0, T], \Omega)$ es solución de la ecuación diferencial $y'(t) = f(t, y(t))$ con la condición inicial $y(0) = y_0$ si y sólo si

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))ds \ \forall t \in [0, T].$$

ii) Probar que si T es suficientemente pequeño, existe una única solución de este problema.

Ejercicio 5. Sea X un espacio métrico completo y sea $T : X \to X$ tal que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que T^n es una contracción. Entonces existe un único $x \in X$ tal que $T(x) = x$.

Ejercicio 6.

i) Probar que existe una única función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es solución de la siguiente ecuación integral

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, y)f(y)dy + \phi(x),$$

donde $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas.

ii) Sea $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ continua. Probar que las soluciones de

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

están definidas para todo tiempo t.