Práctica 8 -Convergencia Uniforme-

Ejercicio 1.

i) Hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida sobre $A \subseteq \mathbb{R}$.

a) $f_n(x) = \ x^n, \quad A = (-1, 1]$.
b) $f_n(x) = \ \frac{e^x}{x^n}, \quad A = (1, +\infty)$.
c) $f_n(x) = \ n^2 x(1 - x^2)^n, \quad A = [0, 1]$.

ii) Para a) demostrar que la convergencia es uniforme en $A = (0, 1/2]$, idem en b) con $A = [2, 5]$. ¿Es uniforme la convergencia de c) en A o en algún sub-intervalo de A?

Ejercicio 2. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones:

i) $f_n(x) = \dfrac{\sin\ nx}{n}, \ x \ \in \mathbb{R}$.

ii) $f_n(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{n}\right), \ x \ \in \mathbb{R}$.

iii) $f_n(z) = \dfrac{n}{n+1} z, \ z \ \in \mathbb{C}$.

iv) $f_n(z) = nz^2, \ z \ \in \mathbb{C}$.

v) $f_n(z) = z^n$, definidas en $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ y en $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Ejercicio 3. Sea X un conjunto y sea $B(X)$ el conjunto de las funciones $X \to \mathbb{C}$ que son acotadas. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $B(X)$.

i) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a una función $f : X \to \mathbb{C}$, ¿es cierto que $f \in B(X)$?

ii) Probar que si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniforme a $f : X \to \mathbb{C}$, entonces $f \in B(X)$.

iii) Probar que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a una función acotada $f : X \to \mathbb{C}$ si y sólo si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f en $(B(X), d_\infty)$.

iv) Probar que si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en X, entonces existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$. En otras palabras, la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ es *uniformemente acotada.*

Ejercicio 4. Dada $f_n(x) = \dfrac{x}{1+x^2} - \dfrac{(x^2+1)x}{1+(n+1)^2x^2}$, probar que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente pero no uniformemente a una función continua.

Ejercicio 5. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $(f_n) : X \to \mathbb{R}$ y $(g_n) \subset: X \to \mathbb{R}$ convergen uniformemente en $E \subset X$, probar que $(f_n + g_n)$ converge uniformemente en E. Si además (f_n) y (g_n) son uniformemente acotadas, entonces $(f_n g_n)$ es uniformemente convergente. Mostrar con un ejemplo que esta última restricción es necesaria.

Ejercicio 6.

i) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones con $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, cada una de ellas derivable, que converge uniformemente a una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y f_n' converge uniformemente a una función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Probar que f es derivable y que $f' = g$.

ii) Sea $\sum_{k=0}^{\infty} f_n(x)$ una serie de funciones. ¿Con qué hipótesis es legítimo derivarla término a término ?

iii) Probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$$

converge uniformemente en $\mathbb{R}$, pero que esto no ocurre para la serie obtenida derivando término a término.

Ejercicio 7. Hallar (y justificar) los conjuntos en $\mathbb{R}$ de convergencia puntual, uniforme y no convergencia de las siguientes series:
$i) \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n \quad ; \qquad ii) \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n \quad ; \qquad iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad ; \qquad iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$
¿Qué ocurre con la serie que se obtiene derivando término a término?

Ejercicio 8. Consideramos la función dada por la serie:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Probar que la serie converge uniformemente en cada intervalo $(1 + \varepsilon, \infty)$ hacia una función continua, y que es posible derivarla término a término en dicho intervalo.

Ejercicio 9. (Teorema de Dini) Sea K compacto y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(K)$ que converge puntualmente a $f \in C(K)$. Para cada $x \in K$ se tiene $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$. Probar que f_n converge uniformemente en K.

Ejercicio 10. Sea X un espacio métrico compacto, sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones continuas $X \to \mathbb{R}$ y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en X que converge la sucesión $(f_n(x))_{n\geq 1}$ converge en $\mathbb{R}$ a $f(\lim_{n\to\infty} x_n)$.

Ejercicio 11. Sean f_n continuas en $[0,1]$ tales que $f_n \rightrightarrows f$. Decidir si vale la siguiente afirmación:

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)dx \to_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)dx.$$

Ejercicio 12. Sean X e Y espacios métricos. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones $X \to Y$ es *equicontinua* en $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, x_0) < \delta \implies \forall f \in \mathcal{F},\ d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

i) Cualquier familia finita de funciones $X \to Y$ continuas en $x_0 \in X$ es equicontinua en x_0.

ii) Sea $B(X, Y)$ el conjunto de todas las funciones $X \to Y$ que son acotadas. Si $\mathcal{F} \subseteq B(X, Y)$ es una familia equicontinua, entonces $\overline{\mathcal{F}}$ también es equicontinua.

Supongamos desde ahora que X es compacto.

iii) Si $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua de funciones $X \to Y$, entonces $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua.

iv) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones continuas $X \to Y$ que converge uniformemente en X, entonces $\{f_n : n \geq 1\}$ es una familia equicontinua.

v) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones $X \to Y$ uniformemente equicontinua que converge puntualmente a $f : X \to Y$, entonces esa convergencia es uniformemente en X.

Ejercicio 13. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $[a, b] \to \mathbb{R}$ integrables y uniformemente acotadas y para cada $n \geq 1$ sea $F_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(\xi)\, d\xi$$

para cada $x \in [a, b]$. Entonces la sucesión $(F_n)_{n\geq 1}$ posee una subsucesión que converge uniformemente sobre $[a, b]$.