PRÁCTICA 5 -COMPLETITUD, CONTINUIDAD UNIFORME Y COMPACIDAD-

"Cuanto más sólido, bien definido y espléndido es el edificio erigido por el entendimiento, más imperioso es el deseo de la vida por escapar de él hacia la libertad."
HEGEL.

A. Completitud

Ejercicio 1. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Probar que:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ si y sólo si para toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

ii) Si existe $x \in X$ para el cual toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} x_{n_{k_j}} = x$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

iii) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. ¿Vale la recíproca?

iv) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces es acotada.

v) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in X$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Ejercicio 2. Probar que si toda bola cerrada de un espacio métrico X es un subespacio completo de X, entonces X es completo.

Ejercicio 3. Sea (X, d) un espacio métrico.

i) Probar que todo subespacio completo de (X, d) es un subconjunto cerrado de X.

ii) Probar que si X es completo, entonces todo subconjunto $F \subseteq X$ cerrado, es un subespacio completo de X.

Ejercicio 4. (Teorema de Cantor) Probar que un espacio métrico (X, d) es completo si y sólo si toda familia $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de X cerrados, no vacíos tales que $F_{n+1} \subset F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\operatorname{diam}(F_n) \longrightarrow 0$ tiene un único punto en la intersección.

Ejercicio 5. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es completo si y sólo si (X, d) e (Y, d') son completos.

Ejercicio 6.

i) Sea X un espacio métrico y sea $B(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ es acotada } \}$. Probar que $(B(X), d_\infty)$ es un espacio métrico completo, donde $d_\infty(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$.

ii) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Probar que $(C[a,b], d_\infty)$ es un espacio métrico completo, donde $d_\infty(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$.

iii) Probar que $C_0 := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \mid a_n \to 0\}$ es un espacio métrico completo con la distancia $d_\infty((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{x \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|$.

Ejercicio 7. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\mathcal{D} \subset X$ un subconjunto denso con la propiedad que toda sucesión de Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ converge en X. Probar que X es completo.

B. Continuidad Uniforme

Ejercicio 8. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función que satisface:

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq c \, d(x_1, x_2)$$

para todo $x_1, x_2 \in X$, donde $c \geq 0$. Probar que f es uniformemente continua.

Ejercicio 9.

i) Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, $A \subseteq X$ y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que si existen $\alpha > 0$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ sucesiones y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

   a) $d(x_n, y_n) \longrightarrow 0$ para $n \to \infty$ y

   b) $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha$ para todo $n \geq n_0$,

   entonces f no es uniformemente continua en A.

ii) Verificar que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. ¿Y en $\mathbb{R}_{\leq -\pi}$?

iii) Verificar que la función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.

Ejercicio 10.

i) Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ una función uniformemente continua y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Probar que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y.

ii) Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ un homeomorfismo uniforme. Probar que (X, d) es completo si y sólo si (Y, d') es completo.

   En particular, si un espacio métrico X es completo para una métrica lo es para cualquier otra métrica uniformemente equivalente.

Ejercicio 11.

i) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada y continua pero no uniformemente continua.

ii) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ no acotada y uniformemente continua.

Ejercicio 12. Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ una función uniformemente continua, y sean $A, B \subset X$ conjuntos no vacíos tales que $d(A, B) = 0$. Probar que $d'(f(A), f(B)) = 0$.

Ejercicio 13. Sean X e Y espacios métricos, Y completo. Sea $D \subset X$ denso y sea $f : D \longrightarrow Y$ una función uniformemente continua. Probar que f tiene una única extensión continua a todo X, es decir, existe una única función $F : X \longrightarrow Y$ continua tal que $F|_D = f$. (Más aún, F es uniformemente continua).

C. Conjuntos Perfectos

Ejercicio 14. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor.

i) Probar que $\mathcal{C}$ es cerrado y acotado (luego compacto).

ii) Probar que $\mathcal{C}$ es perfecto (i.e. $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$).

iii) Probar que $\mathcal{C}$ tiene interior vacío.

iv) Probar que $x \in \mathcal{C}$ sii su desarrollo en base 3 tiene sólo las cifras 0 y 2.

v) Probar que $\mathcal{C}$ tiene la potencia del continuo.

Ejercicio 15. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Probar que si $P \subseteq X$es perfecto entonces es no numerable.

Ejercicio 16.

i) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y no numerable. Sea T el conjunto de puntos de condensación de S (que por el ejercicio 4 de la práctica 3 es no vacío). Probar que:

   a) $S - T$ es numerable.

   b) $S \cap T$ es no numerable.

   c) T es un conjunto cerrado.

   d) T no posee puntos aislados.

ii) (Teorema de Cantor-Bendixon) Probar que cualquier conjunto F cerrado no numerable de $\mathbb{R}^n$ puede expresarse en la forma $F = A \cup B$, donde A es perfecto y B es numerable.

D. Compacidad

Ejercicio 17.

i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Probar que el conjunto $\{0\} \cup \{a_n \ / \ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ es compacto.

ii) Mostrar que el intervalo $(0, 1] \subset \mathbb{R}$ no es compacto.

iii) Sea $S = (a, b) \cap \mathbb{Q}$ con $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Probar que S es un subconjunto cerrado y acotado pero no compacto de $(\mathbb{Q}, d)$, donde d es la métrica euclídea de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 18. Probar que todo espacio métrico compacto es separable.

Ejercicio 19. Sea $A = \{a^{(n)} \in \ell^\infty \ / \ n \in \mathbb{N}\}$, donde cada sucesión $a^{(n)} = (a_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ está definida por

$$a_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n, \\ 1 & \text{si } k = n. \end{cases}$$

Probar que A es discreto, cerrado y acotado; pero no compacto.

Ejercicio 20. Dado un cubrimiento por abiertos $(U_i)_{i\in I}$ de un espacio métrico (X, d), un número $\varepsilon > 0$ se llama *número de Lebesgue* de $(U_i)_{i\in I}$ si para todo $x \in X$ existe $j \in I$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U_j$. Probar que todo cubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto tiene un número de Lebesgue.

Ejercicio 21. Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que una familia $(F_i)_{i\in I}$ de subconjuntos de X tiene la *propiedad de intersección finita* (P.I.F.) si cualquier subfamilia finita de $(F_i)_{i\in I}$ tiene intersección no vacía. Probar que los siguientes enunciados son equivalentes:

1. X es compacto;
2. toda familia $(F_i)_{i\in I}$ de subconjuntos cerrados de X con la P.I.F. tiene intersección no vacía;
3. todo subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación en X;
4. X es secuencialmente compacto (es decir, toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente);
5. X es completo y totalmente acotado.

Ejercicio 22. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que:

i) Toda unión finita y toda intersección (finita o infinita) de subconjuntos compactos de X es compacta.

ii) Si (X, d) es compacto, todo subconjunto cerrado de X es compacto.

iii) Un subconjunto $F \subset X$ es cerrado si y sólo si $F \cap K$ es cerrado para todo compacto $K \subset X$.

Ejercicio 23. Sea $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \ / \ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$. Se define en c_0 la métrica

$$d(x, y) = \sup\{|x_n - y_n| \ / \ n \in \mathbb{N}\}.$$

i) Demostrar que la bola cerrada $\overline{B}(x, 1) = \{y \in C_0 \ / \ d(x, y) \leq 1\}$ no es compacta.

ii) Probar que (c_0, d) es separable.

Ejercicio 24. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Se considera $(X \times Y, d_\infty)$, donde

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \text{máx}\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}.$$

Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es compacto si y sólo si (X, d) e (Y, d') son compactos.

Ejercicio 25. Sea (X, d) un espacio métrico.

i) Sean $K \subset X$ un compacto y sea $x \in X - K$. Probar que existe $y \in K$ tal que $d(x, K) = d(x, y)$; es decir, la distancia entre x y K «se realiza».

ii) Sean F, $K \subset X$ dos subconjuntos disjuntos de X tales que F es cerrado y K es compacto. Probar que la distancia $d(F, K)$ entre F y K es positiva.

iii) Sean $K_1, K_2 \subset X$ dos subconjuntos compactos de X tales que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Probar que existen $x_1 \in K_1$ y $x_2 \in K_2$ tales que $d(K_1, K_2) = d(x_1, x_2)$; es decir, la distancia entre K_1 y K_2 «se realiza».

Ejercicio 26. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Se define

$$\mathcal{K}(X) = \{K \subset X \ / \ K \text{ es compacto y no vacío}\}.$$

i) Sea $\tilde{d}(A, B) = \sup\limits_{a\in A}\{d(a, B)\}$. Verificar que $\tilde{d}$ no es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.

ii) Se define $\delta : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \to \mathbb{R}$ como $\delta(A, B) = \text{máx}\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\}$. Probar que para todo $\varepsilon > 0$ vale

$$\delta(A, B) < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \subset B(B, \varepsilon) \quad \text{y} \quad B \subset B(A, \varepsilon),$$

donde $B(C, \varepsilon) = \{x \in X \ / \ d(x, C) < \varepsilon\}$ para cada $C \subset X$.

iii) Probar que δ es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.

Ejercicio 27. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ continua y biyectiva. Probar que si (X, d) es compacto, entonces f es un homeomorfismo.

Ejercicio 28. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Probar que para cada espacio métrico (Y, d'), la proyección $\pi : X \times Y \to Y$ definida por $\pi(x, y) = y$ es cerrada.

Ejercicio 29. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que si Y es compacto y el gráfico de f es cerrado en $X \times Y$, entonces f es continua.

Ejercicio 30.

i) Sea $f : \mathbb{R}_{\geq a} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en $[a, b]$ y también en $[b, +\infty)$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq a}$.

ii) Deducir que $\sqrt{x}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

iii) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 31. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subset X$ compacto. Probar que si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in A$, entonces existe $K > 0$ tal que $f(x) \geq K$ para todo $x \in A$.

Ejercicio 32. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y abierta.

i) Probar que f no tiene extremos locales; es decir, no existen $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $f(x_0) \leq f(x)$ (resp. $f(x_0) \geq f(x)$) para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

ii) Comprobar que existen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tales que $f(\mathbb{R}) = (a, b)$.

iii) Mostrar que $f : \mathbb{R} \longrightarrow (a, b)$ es un homeomorfismo y que ella y su inversa son funciones monótonas.

Ejercicio 33. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función semicontinua superiormente. Probar que f está acotada superiormente en X y que f alcanza máximo en X.

Ejercicio 34. Sea $D \subset X$ un subconjunto denso, y sea $f : D \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Probar que f tiene una única extensión a todo X.¿ Puede $\mathbb{R}$ reemplazarse por $\mathbb{R}^k$? ¿ Por cualquier espacio métrico compacto? ¿ Por cualquier espacio completo? ¿ Por cualquier espacio métrico?