Práctica 2 -¿Hay diferentes infinitos?-

"Llamaremos número cardinal de M al concepto general que,
por medio de nuestra activa capacidad de pensar,
surge del conjunto M cuando hacemos abstracción
de la naturaleza y el orden de sus elementos.
Denotamos el resultado de este doble acto de abstracción por $\overline{\overline{M}}$"
Georg Cantor, 1895.

A. Propiedades básicas de los Conjuntos

Ejercicio 1. Demostrar las siguientes igualdades de conjuntos:

i) $B - \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(B - A_i)$.

ii) $B - \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(B - A_i)$.

iii) $\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B) = B \cap \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)$.

Ejercicio 2. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos y sea $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Hallar una familia de conjuntos $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que verifique simultáneamente:

a) $B_n \subseteq A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$;

b) $B_k \cap B_j = \emptyset$ si $k \neq j$;

c) $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

Ejercicio 3. Sea L un conjunto parcialmente ordenado en el cual todo subconjunto no vacío tiene máximo y mínimo. Probar que L es una cadena finita (o sea, un conjunto finito y totalmente ordenado).

Ejercicio 4. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función y sean A y B subconjuntos de X.

i) Demostrar que:

   a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

   b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

ii) Generalizar al caso de uniones e intersecciones infinitas.

iii) Exhibir un ejemplo donde la inclusión en i) (b) sea estricta.

Ejercicio 5. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función, $A \subseteq X$ y $B, B_1, B_2 \subseteq Y$. Demostrar que:

i) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

ii) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

iii) $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$.

iv) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

v) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Generalizar iv) y v) al caso de uniones e intersecciones infinitas.

Ejercicio 6. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que $f(f^{-1}(B)) = B$ para cada $B \subseteq Y$ si y sólo si f es suryectiva.

Ejercicio 7. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que las siguientes propiedades son equivalentes:

1. f es inyectiva;
2. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ para todo $A, B \subseteq X$;
3. $f^{-1}(f(A)) = A$ para todo $A \subseteq X$;
4. $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ para todo par de subconjuntos A, B tales que $A \cap B = \emptyset$;
5. $f(A - B) = f(A) - f(B)$ para todo $B \subseteq A \subseteq X$.

Ejercicio 8. Para cada subconjunto S de un conjunto A dado se define la *función característica de* S, $\mathcal{X}_S : A \longrightarrow \{0, 1\}$, por

$$\mathcal{X}_S(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in S, \\ 0 & \text{si } a \notin S. \end{cases}$$

Probar que:

i) $\mathcal{X}_{S \cap T} = \mathcal{X}_S \cdot \mathcal{X}_T$ para todo par de subconjuntos $S, T \subseteq A$.

ii) $\mathcal{X}_{A-S} = 1 - \mathcal{X}_S$ para todo $S \subseteq A$.

iii) $\mathcal{X}_S \ + \ \mathcal{X}_T = \mathcal{X}_{S \cup T} \ + \ \mathcal{X}_{S \cap T}$ para todo $S, T \subseteq A$.

Ejercicio 9. Sea A un cadena (o sea, un conjunto con un orden total) y sea B un conjunto parcialmente ordenado. Sea $f : A \to B$ una función inyectiva para la cual si $a, b \in A$ y $a \leq b$, entonces $f(a) \leq f(b)$. Probar que $f(a) \leq f(b)$ implica $a \leq b$.

Ejercicio 10. Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Para cada $a \in A$ se define el conjunto $S_a = \{b \in A \ / \ a \sim b\}$. Probar que:

i) Para todo par de elementos $a_1, a_2 \in A$ vale: $S_{a_1} = S_{a_2}$ o $S_{a_1} \cap S_{a_2} = \emptyset$.

ii) $A = \displaystyle\bigcup_{a \in A} S_a$.

B. Cardinalidad

"Lo peligroso, equívoco de la idea 'los números reales no pueden ordenarse en una serie' reside en que hace que lo que es una determinación conceptual, una formación conceptual, aparezca como un hecho natural"
Ludvig Wittgenstein, *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática.*

"Je le vois, mais je ne le crois pas!"
Carta de Cantor *a* Dedekind *sobre la biyección entre los puntos del segmento unitario y el espacion n-dimensional.*

Ejercicio 11. Demostrar que si A es un conjunto de n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos.

Ejercicio 12. Sea A un conjunto. Probar que son equivalentes:

1. A es infinito (*i.e.* tiene un subconjunto en biyección con $\mathbb{N}$);
2. para todo $x \in A$, existe una función $f_x : A \to A - \{x\}$ biyectiva;
3. para todo $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset A$, existe una función $f_{\{x_1,\ldots,x_n\}} : A \to A - \{x_1, \ldots, x_n\}$ biyectiva.

Ejercicio 13. Sea A un conjunto numerable. Supongamos que existe una función sobreyectiva de A en un conjunto B. Probar que B es a lo sumo numerable.

Ejercicio 14. Probar que los siguientes conjuntos son numerables (es decir, tienen cardinal $\aleph_0$):

$$\mathbb{Z}_{\leq -1} \quad ; \quad \mathbb{Z}_{\geq -3} \quad ; \quad 3.\mathbb{N} \quad ; \quad \mathbb{Z} \quad ; \quad \mathbb{N}^2 \quad ; \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad ; \quad \mathbb{Q} \quad ; \quad \mathbb{N}^m \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Ejercicio 15. Probar que una cadena infinita contiene o bien una cadena isomorfa (con el orden) a $\mathbb{N}$ o bien una cadena isomorfa a $\mathbb{Z}_{\leq -1}$.

Ejercicio 16.

i) Sean A y B conjuntos contables. Probar que $A \cup B$ es contable.

ii) Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos contables. Probar que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es contable.

iii) Sea $\mathcal{A}$ un conjunto finito y $\mathcal{S} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^m$. Probar que $\sharp(\mathcal{S}) = \aleph_0$.

Deducir que, cualquiera sea el alfabeto utilizado, hay más números reales que palabras para nombrarlos. ¿Cuántos subconjuntos de $\mathbb{N}^2$ pueden ser definidos en un lenguaje fijo? ¿Cuántos hay en total?

Ejercicio 17. Sean A y B conjuntos disjuntos, A infinito y B numerable. Probar que:

i) Existe una biyección entre $A \cup B$ y A.

ii) Si A no es numerable y $B \subseteq A$, entonces existe una biyección entre $A - B$ y A.

¿Es numerable el conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$?

Ejercicio 18. Probar que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales es numerable.

Ejercicio 19. Se dice que un número complejo z es *algebraico* si existen enteros $a_0, \ldots, a_n$ no todos nulos, tales que

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0.$$

i) Demostrar que el conjunto de todos los números algebraicos es numerable.

ii) Deducir que existen números reales que no son algebraicos.

Nota: Estos números se llaman *trascendentes*.

Ejercicio 20. Sea $X \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ un conjunto de números reales positivos. Supongamos que existe una constante positiva C tal que para cualquier subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ vale $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq C$. Probar que X es contable.

Ejercicio 21. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función monótona. Probar que:

$$\sharp\big(\{x \in \mathbb{R} \ / \ f \text{ no es continua en } x\}\big) \leq \aleph_0.$$

Ejercicio 22. Probar que si A es un conjunto numerable, el conjunto de las partes finitas de A (es decir, el subconjunto de $\mathcal{P}(A)$ formado por los subconjuntos finitos de A) es numerable.

Ejercicio 23. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos de sucesiones:

i) $\{(a_n) \ / \ a_n \in \mathbb{N} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$.

ii) $\{(a_n) \subset \mathbb{N} \ / \ a_n \leq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$.

iii) $\{(a_n) \subset \mathbb{N} \ / \ a_n \geq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$.

iv) $\{(q_n) \subset \mathbb{Q} \ / \ \lim\limits_{n \to \infty} q_n = 0\}$.

v) $\{(q_n) \subset \mathbb{Q} \ / \ (q_n) \text{ es periódica}\}$.

vi) $\{(a_n) \subset \mathbb{N} \ / \ 1 \leq a_n \leq m \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} \qquad (m \in \mathbb{N})$.

Ejercicio 24. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos:

i) $\{I \ / \ I \text{ es un intervalo de extremos racionales}\}$.

ii) $\{[a, b] \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$.

iii) I , sabiendo que $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}$ es una familia de intervalos disjuntos.

iv) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 3x + 2y \geq 7\}$.

v) $\mathbb{R}_{>0}$.

Ejercicio 25. Probar que la unión numerable de conjuntos de cardinal c tiene cardinal c.

Ejercicio 26. Sean a, b, c cardinales. Probar que:

i) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

ii) $a^{b+c} = a^b \cdot \ a^c$.

iii) $(a^b)^c = a^{bc}$.

iv) $(ab)^c = a^c \cdot \ b^c$.

v) Si $b \leq c$, entonces $\ a^b \leq a^c \quad$ y $\quad b^a \leq c^a$.

Ejercicio 27. Probar que $\ n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = c^{\aleph_0} = c\ $ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Ejercicio 28. Mostrar que $\mathbb{R}$ es unión disjunta de c conjuntos de cardinal c.

Ejercicio 29. Se consideran los siguientes conjuntos de funciones:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}(\mathbb{R}) & = & \{f \ / \ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}; \\ \mathcal{C}(\mathbb{R}) & = & \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \ / \ f \text{ es continua}\}; \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathcal{F}(\mathbb{Q}) & = & \{f \ / \ f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}\}; \\ \mathcal{C}(\mathbb{Q}) & = & \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{Q}) \ / \ f \text{ es continua}\}. \end{array}$$

i) Probar que $\sharp(\mathcal{F}(\mathbb{R})) > c$.

ii) Calcular $\sharp(\mathcal{F}(\mathbb{Q}))$.

iii) Calcular $\sharp(\mathcal{C}(\mathbb{Q}))$.

iv) Probar que la función $\phi : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{Q})$ dada por $\phi(f) = f|_{\mathbb{Q}}$ es inyectiva. ¿Qué significa esto?

v) Calcular $\sharp(\mathcal{C}(\mathbb{R}))$.

Ejercicio 30. Probar que el conjunto de partes numerables de $\mathbb{R}$ (es decir, el subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ formado por todos los subconjuntos numerables de $\mathbb{R}$) tiene cardinal c.

C. Lema de Zorn y Axioma de Elección

"Una de las implicancias del proyecto de Kroneker era que él consideraba una definición aceptable solo si podía ser chequeado en un número finito de pasos si un número dado la cumplía o no. Este punto de vista lo llevó a una crítica de las demostraciones de existencia "puras"(no constructivas). El sostenía que una prueba de existencia de un número solo podía considerarse correcta si daba un método para encontrarlo."
TROESTRA Y VAN DALEN.

"Das ist nicht Mathematik. Das ist Theologie."
P.GORDAN *sobre el la demostración de* D.HILBERT *de su teorema de la base.*

Ejercicio 31. Sean $A, B \neq \emptyset$. Probar que o bien existe $f : A \to B$ inyectiva, o bien existe $g : B \to A$ inyectiva (es decir $\sharp A \leq \sharp B$ o $\sharp B \leq \sharp A$).

Ejercicio 32. Sean V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $S \subseteq V$ un subespacio. Sea T: $S \to \mathbb{R}$ una transformación lineal. Probar que T se puede extender a todo el espacio, es decir que existe $\widetilde{T}: V \to \mathbb{R}$ lineal tal que $\widetilde{T}|_S \equiv T$.

Ejercicio 33. Probar que todo conjunto linealmente independiente se puede extender a una base.

Ejercicio 34. Probar que de todo sistema de generadores se puede extraer una base.

Ejercicio 35. Probar que existe una aplicación suryectiva $f : X \to Y$ si y sólo si existe $g : Y \to X$ inyectiva (es decir que $\sharp X \geq \sharp Y$si y sólo si $\sharp Y \leq \sharp X$).

Ejercicio 36. Probar que si X es un conjunto infinito, entonces existe una aplicación inyectiva $f : \mathbb{N} \to X$. *Sugerencia*: definir f por medio de las fórmulas recursivas

$$\begin{array}{rcl} f(1) & = & e(X); \\ f(n+1) & = & e(X - \{f(1), ..., f(n)\}). \end{array}$$