ANALISIS NUMERICO — Práctica 4

Segundo Cuatrimestre de 2011

Ejercicio 1. Probar que las normas

$$\|u\|_{W^{1,2}} = \|u\|_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2} \quad \text{y} \quad \|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

son equivalentes. Verificar que la norma de H^1 se deriva de un producto escalar.

Ejercicio 2. Considerar el problema: encontrar $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, tal que:

$$\begin{cases} - \triangle u + u = f \quad \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

con f una función prefijada en $C(\overline{\Omega})$.

i) ¿Qué se considera una solución clásica del problema?

ii) ¿Cómo definiría una solución débil?

iii) Probar que toda solución clásica es una solución débil.

iv) Probar que existe una solución única en $H_0^1(\Omega)$ de la formulación débil.

Ejercicio 3. Considerar el problema: encontrar $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un abierto acotado de clase C^1, tal que:

$$\begin{cases} - \triangle u + u &= f \quad \text{en} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

con f una función prefijada en $C(\overline{\Omega})$.

i) Defina solución clásica y débil para este problema.

ii) Probar que toda solución clásica es una solución débil.

iii) Probar que existe una solución única en $H^1(\Omega)$ de la formulación débil.

Ejercicio 4. a) (Teorema de trazas en un rectángulo) Sea $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, probar que dada $u \in H^1(\Omega)$ existe una cosntante $C > 0$ tal que :

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

b) Considerar el problema: encontrar $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$\begin{cases} -\triangle u &= f \quad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{en } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \quad \text{sobre } \partial\Omega \setminus \Gamma_1 \end{cases}$$

donde $f \in C(\overline{\Omega})$ y $g \in L^2(\partial\Omega)$ son funciones dadas y $\Gamma_1 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\, y = 0\}$.

i) Defina solución clásica y débil en un espacio adecuado $V \subset H^1(\Omega)$.

ii) Probar que toda solución clásica es una solución débil.

iii) Probar que existe una solución única en V de la formulación débil.

Ejercicio 5. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Sean $a_{i,j} \in C^1(\overline{\Omega})$, $1 \leq i,j \leq n$ que verifican la condición de elipticidad:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\chi_i\chi_j \geq \alpha|\chi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \chi \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha > 0$$

Sea también $a_0(x) \in C(\overline{\Omega})$. Se busca una función $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifique:

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + a_0 u = f \quad \text{en } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

i) Defina solución clásica y débil para este problema.
ii) Probar que toda solución clásica es una solución débil.
iii) Probar que para $a_0(x) \geq 0$ en Ω y $f \in L^2$ existe una solución única en $H_0^1(\Omega)$ de la formulación débil.

Ejercicio 6. Considere el siguiente problema en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} -\triangle u + \beta_1\frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2\frac{\partial u}{\partial y} = f \quad \text{en } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Donde β_1 y β_2 son constantes en $\mathbb{R}$ y $f \in L^2(\Omega)$.

i) Hallar la forma débil en un espacio adecuado V.

ii) Probar que existe una solución única en V de la formulación débil.
Sug. : Para ver la coercitividad verifique que:

$$\int_\Omega (\beta_1\frac{\partial v}{\partial x} + \beta_2\frac{\partial v}{\partial y}).v = 0, \forall v \in V$$

Ejercicio 7. 1. Dado el problema variacional

$$a(u,v) = \int_\Omega fv \quad \text{para todo} \quad v \in V$$

con $a : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Considere la respectiva aproximación de Galerkin sobre un espacio discreto $V_h = V_h^1 \oplus V_h^2 \subset V$ que posee la propiedad de que $a(v_h^1, v_h^2) = 0$ para todo par $v_h^1 \in V_h^1, v_h^2 \in V_h^2$. Demuestre que $u_h = u_h^1 + u_h^2$ es solución de la aproximación de Galerkin si y solo si los u_h^i resuelven respectivamente

$$a(u_h^i, v_h^i) = \int_\Omega f v_h^i \quad \text{para todo} \quad v_h^i \in V_h^i$$

2. Tome $a(u,v) = \int_0^1 u'v'$ y $V = H_0^1(0,1)$ en el item previo y considere $(0,1) = I = \cup_{i=0}^{N-1} I_i$, $I_i = (x_i, x_{i+1})$, con $x_{i+1} = x_i + h$. Tome entonces

$$V_h^1 = \{u \in H_0^1 \ \text{ tal que } \ u \in P_1(I_i) \ \text{ para todo } \ 0 \le i \le N-1\} =< \phi_1, ..., \phi_{N-1} >$$

con $\phi_i(x_j) = \delta_i^j$, y sea $V_h^2 =< \hat{\phi}_0, ..., \hat{\phi}_{N-1} >$ con

$$\hat{\phi}_i = \begin{cases} \frac{4}{h^2}(x - x_i)(x_{i+1} - x) & x \in I_i \\ 0 & x \in I - I_i \end{cases}$$

Demuestre que $V_h = V_h^1 \oplus V_h^2$ está en las hipótesis del item previo, y entonces se pide hallar los β_i que verifican $u_h = \sum \alpha_i \phi_i + \beta_i \hat{\phi}_i$.

Ejercicio 8. Dar dos ejemplos de formas bilineales $(a_{i,j})$ diferentes, que corresponden a formas variacionales distintas, pero den lugar al mismo operador diferencial.

Ejercicio 9. Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$. Sea T_h una subdivisión de Ω en elementos K (intervalos en $\mathbb{R}$, triángulos o cuadriláteros en $\mathbb{R}^2$, tetraedros en $\mathbb{R}^3$). Probar que una función definida en todo Ω y que es polinomial en cada elemento, pertenece a $H^1(\Omega)$ si y sólo si es continua en Ω.

Ejercicio 10. Encontrar la dimensión de los siguientes espacios de funciones, definidas sobre un elemento K en $\mathbb{R}^2$:

i) funciones lineales

ii) funciones cuadráticas

iii) $P_r(K) = \{v \ : \ v \text{ es un polinomio de grado } \le r \text{ sobre } K\}$

iv) funciones bilineales ($v = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy$).

Ejercicio 11. Sea C_h una triangulación de un dominio acotado con frontera poligonal $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (es decir, una subdivisión de Ω en triángulos que no se superponen, y tal que los vértices de ningún triángulo se encuentran sobre los lados de otro triángulo).

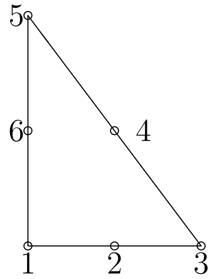
i) Sea V_h el espacio de funciones continuas definidas en Ω, lineales en cada triángulo de C_h. Probar que una función en V_h está unívocamente determinada por su valor en los nodos de C_h (incluyendo los pertenecientes al borde de Ω). Verificar que la función resulta continua.

ii) Sea V_h el espacio de funciones continuas definidas en Ω, cuadráticas en cada triángulo de C_h. Probar que una función en V_h está unívocamente determinada por ejemplo por su valor en los nodos de C_h (incluyendo los pertenecientes al borde de Ω) y en el punto medio de cada lado de los elementos de C_h.

Ejercicio 12. Sea T_h una triangulación de un dominio acotado con frontera poligonal $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sea V_h el espacio de funciones continuas definidas en Ω, cuadráticas en cada triángulo de T_h.

i)Explicar como elegiría los nodos en cada triángulo para garantizar que una función en V_h esté unívocamente determinada por su valor en los nodos elegidos.

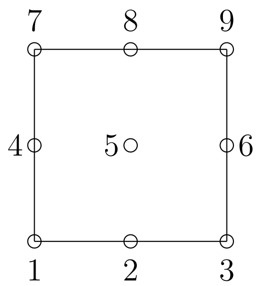
ii) Considere ahora el triángulo de referencia y los nodos n_j, $1 \leq j \leq 6$ como se indica en la Figura. Hallar ϕ_i, $1 \leq i \leq 6$ las funciones en V_h que satisfacen $\phi_i(n_j) = \delta_{ij}$.



Ejercicio 13. Sea Q_h una na subdivisión en rectángulos Q, con lados paralelos a los ejes coordinados de un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sea V_h el espacio de funciones continuas definidas en Ω, tal que en cada rectángulo es una función de $Q_2 = \{v : v = \sum c_j p_j(x) q_j(y)\}$ donde p_j y q_j son polinomios de grado menor o igual a 2.

i)Explicar como elegiría los nodos en cada rectángulo para garantizar que una función en V_h esté unívocamente determinada por su valor en los nodos elegidos.

ii) Considere ahora el rectángulos de referencia $[0,1]^2$ y los nodos n_j, $1 \leq j \leq 6$ como se indica en la Figura. Hallar ϕ_i, $1 \leq i \leq 6$ las funciones en V_h que satisfacen $\phi_i(n_j) = \delta_{ij}$.



Ejercicio 14. Consideremos $\Omega \in \mathbb{R}^2$ un dominio con borde poligonal, y T_h una triangulación del mismo. Sea $K \subset T_h$ un triángulo de la partición. Llamamos:

$h_K =$ mayor de los lados de K,

$\rho_K =$ diámetro del círculo inscripto en K,

$h = \max_{K \in T_h} h_K$.

Probar que la condición $\dfrac{h_K}{\rho_K} \leq \beta \quad \forall K \in T_h$ es equivalente a que exista $\theta_0 > 0$ tal que para cualquier ángulo θ de cualquier triángulo $K \in T_h$ se tiene $\theta \geq \theta_0$ (esta condición es conocida como "condición del ángulo mínimo").

Ejercicio 15. Sea Q un rectángulo en $\mathbb{R}^2$, con lados paralelos a los ejes. Considerar una subdivisión C_h de Q en subrectángulos que no se solapan tal que ningún vértice de ningún rectángulo pertenece al lado de otro rectángulo. Sea V_h el conjunto de funciones continuas definidas en Q, bilineales en cada subrectángulo. Probar que un elemento de V_h está unívocamente determinado por su valor en los nodos de C_h (incluyendo los nodos en el borde de Q).

Ejercicio 16. Se desea aproximar

$$\int_{\hat{T}} f(\hat{x})d\hat{x}$$

donde $\hat{T}$ es el triángulo de referencia que tiene vértices $(0,0),(1,0)$ y $(0,1)$.

a) Mostrar que la fórmula de integración numérica

$$\int_{\hat{T}} f(\hat{x})d\hat{x} \sim \frac{1}{2}f(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$$

es exacta para polinomios de grado menor o igual a 1.

b) Mostrar que la fórmula de integración numérica

$$\int_{\hat{T}} f(\hat{x})d\hat{x} \sim \frac{1}{6}(f(\frac{1}{2},0)+f(0,\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$$

es exacta para polinomios de grado menor o igual que 2.

Ejercicio 17. Sea T un triángulo genérico (no degenerado) de vértices a_1,a_2,a_3. Sea $F(\hat{x}) = B\hat{x}+b$ la transformación afín que transforma $\hat{T}$ en T. Usando el ejercicio 16 a) y haciendo un cambio de variables mostrar que la fórmula de cuadratura

$$\int_T f(x)dx \sim |T|f(a_{123}),$$

donde a_{123} es el baricentro del triángulo T, es exacta para polinomios de grado menor o igual que 1.

Ejercicio 18. Procediendo en forma análoga al ejercicio previo y usando el ejercicio 16 b), mostrar que la fórmula de cuadratura

$$\int_T f(x)dx \sim \frac{|T|}{3}(f(a_{12})+f(a_{13})+f(a_{23}))$$

donde $a_{ij}, i<j$ denota el punto medio del lado de vértices a_i y a_j, es exacta para polinomios de grado menor o igual que 2.

Ejercicio 19. En forma análoga a los ejercicios previos mostrar que la fórmula de cuadratura

$$\int_T f(x)dx \sim \frac{|T|}{60}(3\sum_{i=1}^{3} f(a_i) + 8\sum_{1\le i<j\le 3} f(a_{ij}) + 27f(a_{123}))$$

es exacta para polinomios de grado menor o igual que 3.

Ejercicio 20. Considerar la triangulación del cuadrado $[0,1]\times[0,1]$ que se obtiene trazando las diagonales, y consiste de cuatro triángulos. Numerar los nodos de la siguiente manera: $N_1 = (0,0), N_2 = (1,0), N_3 = (1,1), N_4 = (0,1), N_5 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Hallar las matrices locales y la matriz de rigidez que resultan al resolver el problema del ejercicio 3 usando elementos finitos lineales.

Ejercicio 21. Considerar la subdivisión del cuadrado $[0,1]\times[0,1]$ que se obtiene trazando dos rectas paralelas a los ejes, y consiste de cuatro cuadrados. Numerar los nodos de la siguiente manera: $N_1 = (0,0), N_2 = (1,0), N_3 = (1,1), N_4 = (0,1), N_5 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $N_6 = (1/2, 0), N_7 = (1, 1/2), N_8 = (1/2, 1), N_9 = (0, 1/2)$. Hallar la solución del sistema variacional discreto del ejercicio 2 con $f = 1$, usando elementos finitos bilineales .

Ejercicio 22. Hacer un programa para resolver la ecuación de Poisson $-\triangle u = f$ con condición de borde $u|_{\partial\Omega} = 0$, en un polígono convexo Ω usando elementos finitos lineales (dando como dato de entrada los nodos de la triangulación). Calcular el error $\|u - u_h\|$ en diversas normas y graficar en función de h.

Ejercicio 23. Hacer un programa para resolver la ecuación $-\triangle u + u = f$ con condición de borde $u|_{\partial\Omega} = g$, en un polígono convexo Ω usando elementos finitos lineales (dando como dato de entrada los nodos de la triangulación). Calcular el error $\|u - u_h\|$ en diversas normas y graficar en función de h.