Análisis Complejo

Segundo Cuatrimestre — 2011

Práctica 8: Sucesiones de funciones holomorfas

El espacio de las funciones holomorfas

Notación: Notaremos $\mathcal{H}(\Omega)$ al espacio de las funciones holomorfas en Ω con la métrica de la convergencia uniforme sobre compactos. Diremos además que $f_n \to f$ en $\mathcal{H}(\Omega)$ si $(f_n)_n, f \subseteq \Omega$ y f_n tiende a f con la métrica anterior. Finalmente, diremos que un subconjunto $A \subset \mathcal{H}(\Omega)$ es *acotado* si es uniformemente acotado sobre compactos, es decir, si para todo compacto $K \subset \Omega$ existe M_K tal que $||f||_K = sup_{z\in K}|f(z)| \le M_K$ para toda $f \in A$.

1.1. Probar que si $f_n \to f$ en $\mathcal{H}(\Omega)$ y $(z_n)_{n\geq 1} \subset \Omega$ es tal que $z_n \to z \in \Omega$, entonces $f_n(z_n) \to f(z)$.

1.2. Probar que $\{(1+z/n)^n\}_{n\geq 1}$ converge a e^z en $\mathcal{H}(\Omega)$.

1.3. Mostrar que si $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión convergente en $\mathcal{H}(\Omega)$ y f es su límite, entonces $(\mathrm{e}^{f_n})_{n\geq 1}$ converge a e^f.

1.4. Sea $K \subset \Omega$ un compacto.

(a) Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathcal{H}(\Omega)$. Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ uniformemente sobre K y la función f no se anula en K, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que *(i)* f_n no se anula en K si $n \geq N$, y *(ii)* la sucesión $(\frac{1}{f_n})_{n\geq N}$ converge a $\frac{1}{f}$ uniformemente en K.

(b) Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y $(g_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones que convergen uniformemente sobre K a f y a g, elementos de $\mathcal{H}(\Omega)$, respectivamente. Entonces $(f_n g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente sobre K a fg.

(c) Sea γ una curva cerrada simple incluída en Ω y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que f no se anula sobre γ. Probar que si $f_n \to f$ en $\mathcal{H}(\Omega)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, la cantidad de ceros de f_n en el interior de γ es igual a la cantidad de ceros de f allí.

1.5. Sea $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$. Si $R > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que P_N no se anula en $[-R, R]$.

1.6. Sea $f_n \to f$ en $\mathcal{H}(\Omega)$ con f no idénticamente nula. Probar que si para algún $a \in \Omega$ se tiene que $f(a) = 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ existe $a_n \in \Omega$ de modo que $a_n \to a$ y $f_n(a_n) = 0$.

1.7. Probar que si $f_n \to f$ en $\mathcal{H}(\Omega)$, entonces $\{f_n\}_n$ es un conjunto acotado en $\mathcal{H}(\Omega)$.

1.8. Sea $A \subset \mathcal{H}(\Omega)$ un conjunto acotado. Probar que $A' = \{f'/f \in A\}$ también es acotado en $\mathcal{H}(\Omega)$.

1.9. *(a)* Probar que $A \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ es acotado si y sólo si para cada $z_0 \in \Omega$ existen $r > 0$ y $M > 0$ tales que $B_r(z_0) \subseteq \Omega$ y $|f(z)| < M$ si $z \in B_r(z_0)$ y $f \in A$. En otras palabras, A es acotado si es "acotado en cada punto".

(b) Probar que un conjunto $A \subset \mathcal{H}(\Omega)$ es acotado si y sólo si para toda sucesión $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{C}$ que converge a cero y toda sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ en A la sucesión $(\alpha_n f_n)_{n\geq 1}$ converge a 0 en $\mathcal{H}(\Omega)$.

(c) Mostrar que la noción de acotación con respecto a la métrica en $\mathcal{H}(\Omega)$ no es la misma que la definida al principio.