Análisis Complejo
Segundo Cuatrimestre — 2011

Práctica 7: Funciones meromorfas, productos infinitos y automorfismos

Sucesiones de funciones meromorfas

1.1. 1. Mostrar que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z}.$$

Sugerencia.

- Observar que ambos miembros de la igualdad son funciones meromorfas en $\mathbb{C}$, periódicas de período 1 y con polos de orden 2 en todos los enteros.
- Verificar, además, que en cada entero n, la parte singular de cada una de las funciones es $\frac{1}{(z-n)^2}$, de manera que la diferencia entre ambos miembros es una función cuyas únicas singularidades resultan evitables.
- Probar que esta diferencia es una función acotada.

2. Utilizando el resultado anterior, calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

1.2. Mostrar que

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2} = \pi \operatorname{cotg}(\pi z).$$

1.3. Sea f una función meromorfa con polos simples en los puntos $a_1, a_2, \dots$ con $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$ y $\text{lím}_{n\to\infty} a_n = \infty$, y sea A_n el residuo de f en a_n.

(a) Probar que existe una sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\text{lím}_{n\to\infty} r_n = +\infty$ y f no tiene singularidades sobre $S_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r_n\}$.

(b) Probar que si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in S_n} \left|\frac{f(z)}{z}\right| = 0$, entonces

$$f(z) = f(0) + \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} \right).$$

Sugerencia. Calcular $\text{lím}_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|z|=r_n\}} \frac{f(w)}{w(w-z)} dw$.

Productos infinitos

2.1. Mostrar que

(a) $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$.

(b) $\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + z^{2^n}\right) = \frac{1}{1-z}$. si $|z| < 1$.

2.2. Demostrar que el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^n)$ define una función holomorfa en $B_1(0)$.

2.3. Probar que el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2z-1}{n^2z+1}$$

define una función holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}(z) > 0\}$. Determinar los ceros de esta función y sus multiplicidades.

2.4. Probar que el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{z}{2^n}\right)$$

define una función entera. Encontrar sus ceros y sus multiplicidades.

2.5. Demostrar que el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$$

define una función entera.

2.6. Sea $g(z) = \mathsf{sen}(\pi z)$. Teniendo en cuenta que $\frac{g'(z)}{g(z)} = \pi\mathrm{cotg}(\pi z)$, mostrar que

$$\mathsf{sen}(\pi z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\pi z.$$

Funciones holomorfas con ceros prefijados en la bola unidad

3.1. *(a)* Probar que si $a, z \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}$ tales que $0 < |a| < 1$ y $|z| \leq r < 1$, entonces

$$\left|\frac{a+|a|z}{(1-\overline{a}z)a}\right| \leq \frac{1+r}{1-r}.$$

(b) Demostrar que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{C}$ tal que $0 < |a_n| < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|) < \infty$, entonces el producto

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{a_n}\cdot\frac{(a_n-z)}{(1-\overline{a_n}z)}$$

define una función holomorfa en $B_1(0)$ tal que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in B_1(0)$. ¿Cuales son los ceros de f?

3.2. Mostrar que existe una función holomorfa $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ que no se extiende de manera holomorfa a ningún abierto conexo que contenga a $B_1(0)$ propiamente.

Sugerencia. Usar el ejercicio anterior.

Automorfismos

4.1. *(a)* Probar que si $f : B_1(0) \to B_1(0)$ es un automorfismo que satisface $f(0) = 0$, entonces existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) = e^{i\theta}z$ para todo $z \in B_1(0)$.

(b) Demostrar que una función holomorfa $f : B_1(0) \to B_1(0)$ es automorfismo si y sólo si existen $\theta \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in B_1(0)$ tales que para todo $z \in B_1(0)$ es

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}.$$

4.2. *(a)* Sea $\mathscr{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Im}(z) > 0\}$ el semiplano superior. Probar que una función holomorfa $f : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ es un automorfismo si y sólo si existen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $ad - bc > 0$ tales que para todo $z \in \mathscr{H}$ es

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

(b) ¿Cuáles son los automorfismos del semiplano inferior?

4.3. Describir los automorfismos de $\mathscr{L} = \{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Im}(z) > 0, \mathsf{Re}(z) > 0\}$.

4.4. Describir los automorfismos de $\overline{\mathbb{C}}$.

4.5. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo del plano, $f, g : \Omega \to \Omega$ dos automorfismos y a y b dos puntos distintos de Ω. Probar que si $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$, entonces $f = g$.

4.6. Describir los automorfismos de $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ estudiando sus desarrollos de Laurent alrededor de 0.

Función zeta de Riemann y función Gamma

5.1. *Función Zeta de Riemann.*

(a) Probar que la serie

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

converge absoluta y uniformemente sobre cada compacto del semiplano $\{s \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\, s > 1\}$. La función que define es la *función Zeta de Riemann.*

(b) Probar que si $\mathsf{Re}(s) > 1$ entonces

$$\zeta(s)(1-2^{-s}) = \sum_{n \text{ impar}} n^{-s}.$$

(c) Probar que si $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ es la sucesión creciente formada por todos los primos positivos, entonces

$$\zeta(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_n^{-s}}.$$

5.2. *Función Gamma.*

Se define la función gamma en $\{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}(z) > 0\}$ como:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

(a) Probar que $\Gamma(z)$ es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}(z) > 0\}$ y que allí se verifica:

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \log t dt.$$

(b) Mostrar que $\Gamma(1) = 1$ y que si $\mathsf{Re}(z) > 0$, se tiene $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Deducir de ello que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Sea $z > 0$. Mostrar que para todos $t \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $0 < t < n$ es

$$\left| e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right| \leq \frac{e^{-t+1} t^2}{2n},$$

y, usando esto, que

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \, \mathrm{d}t.$$

(d) Integrando por partes n veces en esta última expresión, mostrar que

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^z}{z} \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+z}.$$

(e) Sea γ la constante de Euler, definida por

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n).$$

Mostrar que

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+z}\right) e^{\frac{z}{k}}. \tag{1}$$

(f) Mostrar que esta igualdad vale para todo $z \in \{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}(z) > 0\}$.

(g) La identidad (1) nos da una prolongación analítica para Γ al abierto $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Mostrar que todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ vale que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\mathsf{sen}(\pi z)}.$$