
ANÁLISIS COMPLEJO

Segundo Cuatrimestre — 2011

Práctica 6: Singularidades y teoría de residuos

Singularidades

1.1. Sea $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$. Encontrar el desarrollo en serie de Laurent de f en cada uno de los siguientes anillos:

- (a) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$; (d) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}$;
(b) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$; (e) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-1|\}$;
(c) $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z|\}$; (f) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-2| < 2\}$.

1.2. Determinar el coeficiente de z en el desarrollo de Laurent de $\frac{e^z}{z-1}$ en el anillo $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

1.3. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $0 < |z| < \infty$, probar que

$$e^{\frac{1}{2}\lambda(z+\frac{1}{z})} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right)$$

con $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{\lambda \cos t} \cos nt \, dt$ para $n \geq 0$.

1.4. Determinar qué tipo de singularidad tiene cada una de las siguientes funciones f en 0. Cuando sea evitable, definir $f(0)$ de modo que f resulte holomorfa en 0; cuando sea un polo, determinar su orden y hallar la parte singular.

- (a) $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$; (d) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$; (g) $f(z) = \frac{z^2+1}{z(z+1)}$;
(b) $f(z) = \frac{\cos z}{z}$; (e) $f(z) = \frac{\log(z+1)}{z}$;
(c) $f(z) = \frac{\cos z-1}{z}$; (f) $f(z) = \frac{1}{z} \cos \frac{1}{z}$; (h) $f(z) = \frac{1}{1-e^z}$.

1.5. ¿Es 0 una singularidad esencial de la función que define la siguiente serie de Laurent?

$$\cdots + \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \cdots + \frac{z^n}{2^{n+1}} + \cdots$$

1.6. Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{i, 2i\}$. Probar que si f tiene singularidades no evitables en $z = i$ y en $z = 2i$, entonces el desarrollo en serie de Laurent de f en $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ tiene infinitos términos negativos e infinitos términos positivos no nulos.

1.7. (a) Probar que z_0 es un cero de orden k de una función f si y sólo si es un polo de orden k de $\frac{1}{f}$.

- (b) Si z_0 es un cero (polo) de orden k de f y un cero (polo) de orden k de g , ¿qué clase de singularidad de $\frac{f}{g}$ es z_0 ?
- (c) Si z_0 es una singularidad esencial de f y un polo de g , ¿qué tipo de singularidad tienen fg y $\frac{f}{g}$ en z_0 ?

1.8. Si z_0 es una singularidad evitable, un polo o una singularidad esencial de la función f , determinar qué tipo de singularidad tiene la función e^f en z_0 .

1.9. Sea

$$f(z) = \frac{a_m z^m + \cdots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + \cdots + b_1 z + b_0}.$$

De acuerdo con el grado de los polinomios, ¿qué tipo de singularidad tiene f en ∞ ?

1.10. Clasificar las singularidades de las siguientes funciones en $\overline{\mathbb{C}}$ y determinar, cuando corresponda, el orden de sus polos.

- (a) $f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$; (d) $f(z) = \frac{z^5}{1+z^4}$; (g) $f(z) = \frac{\cos z - \operatorname{sen} z}{z^4 + 2z^2 + 1}$;
 (b) $f(z) = \cos(z)e^{-\frac{1}{z^2}}$; (e) $f(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z^2}\right)^{-1}$; (h) $f(z) = \frac{1}{\cos z - 1}$.
 (c) $f(z) = \frac{1}{z^3 - 5} + ze^{\frac{1}{z}}$; (f) $f(z) = e^{1-\frac{z}{z}}$;

1.11. Sea f una función entera. Probar que:

- (a) f tiene una singularidad evitable en ∞ si y sólo si f es constante,
 (b) f tiene un polo de orden n en ∞ si y sólo si f es un polinomio de grado n .
 (c) Concluir que una función g es racional si y sólo si g tiene un número finito de polos en $\overline{\mathbb{C}}$.

1.12. Probar que si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es entera y biyectiva, entonces existen $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$ tales que $f(z) = az + b$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Cálculo de residuos

2.1. Calcular los residuos de f en cada una de sus singularidades aisladas en \mathbb{C} :

- (a) $f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)}$, (b) $f(z) = \frac{1}{z^3} \operatorname{sen} z$, (c) $f(z) = z^5 \cos \frac{1}{z}$.

2.2. (a) Probar que si a un polo de orden m de f y si $g(z) = (z-a)^m f(z)$, entonces

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} g^{(m-1)}(z).$$

(b) Si a es un polo simple de f , entonces

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z).$$

2.3. Sea f una función meromorfa en un abierto Ω , sea g holomorfa en Ω y sea $a \in \Omega$. Probar que:

- (a) Si a es un polo simple de f , entonces $\text{Res}(fg, a) = \text{Res}(f, a)g(a)$.
- (b) Si a es un cero de orden m de f , entonces a es un polo simple de $\frac{f'}{f}$ y $\text{Res}(\frac{f'}{f}, a) = m$.
- (c) Si a es un polo de orden m de f , entonces a es un polo simple de $\frac{f'}{f}$ y $\text{Res}(\frac{f'}{f}, a) = -m$.
- (d) Si a es un cero de orden m de f , entonces a es un polo simple de $\frac{f'g}{f}$ y $\text{Res}(\frac{f'g}{f}, a) = mg(a)$.

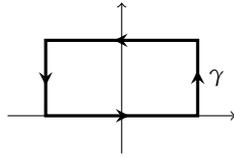
2.4. Calcular los siguientes residuos:

- (a) $\frac{e^z}{(z-1)^2}$ en $z = 0, 1$;
- (b) $\frac{\cos z - 1}{\sin z - z}$ en $z = 0$;
- (c) $\frac{z^4 e^z}{1+e^z}$ en $z = \pi i$.

2.5. Sea C la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ recorrida en el sentido positivo. Calcular:

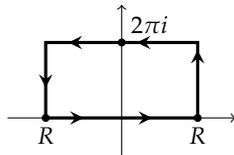
- (a) $\int_C \frac{z}{z^4+1} dz$;
- (b) $\int_C \frac{1+\sin z}{\sin z} dz$;
- (c) $\int_C \frac{dz}{(z+1)^2(z^2-9)}$.

2.6. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ entera y sea γ una curva como en la figura



Probar que si γ no se anula sobre γ y $\int_{\gamma} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$, entonces f no se anula en el interior de γ .

2.7. Para $0 < a < 1$ calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx$ integrando, para cada $R > 0$, en el rectángulo de altura $2\pi i$



y tomando límite cuando $R \rightarrow \infty$.

2.8. (a) Sea $Q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función racional sin polos reales. Mostrar que si $\lim_{|z| \rightarrow \infty} zQ(z) = 0$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q(x) dx = 2\pi i \sum_{z_i} \text{Res}(Q, z_i),$$

donde la suma se toma sobre todos los polos z_i de Q con parte imaginaria positiva.

(b) Calcular:

$$(i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx; \quad (ii) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx; \quad (iii) \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+2x^2+1} dx.$$

2.9. (a) Sea $Q : \mathbb{C} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ una función racional sin polos reales para la cual se tiene que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} Q(z) = 0$. Probar que

$$\text{v. p. } \int_{-\infty}^{\infty} Q(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{z_i} \text{Res}(Q(z)e^{iz}, z_i),$$

donde la suma se toma sobre todos los polos z_i de Q con parte imaginaria positiva.

(b) Calcular:

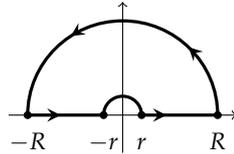
$$(i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx; \quad (ii) \int_0^{\infty} \frac{x \text{sen } x}{x^2+1} dx.$$

2.10. (a) Sea $Q : \mathbb{C} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ una función racional sin polos reales, salvo por el origen, en donde tiene un polo simple. Probar que si $\lim_{|z| \rightarrow \infty} Q(z) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ r \rightarrow 0 \\ r > 0}} \left(\int_{-R}^{-r} Q(x)e^{ix} dx + \int_r^R Q(x)e^{ix} dx \right) \\ = \pi i \text{Res}(Q(z)e^{iz}, 0) + 2\pi i \sum_{z_i} \text{Res}(Q(z)e^{iz}, z_i), \end{aligned}$$

donde la suma se toma sobre todos los polos z_i de Q con parte imaginaria positiva.

Sugerencia. Integrar sobre curvas como la siguiente, tomando luego los límites $R \rightarrow +\infty$ y $r \rightarrow 0$:



(b) Mostrar que

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r > 0}} \left(\int_{-\infty}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right) = \pi i$$

y deducir que

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

2.11. Para cada $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mostrar que la integral $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2} dx$ converge y calcularla.

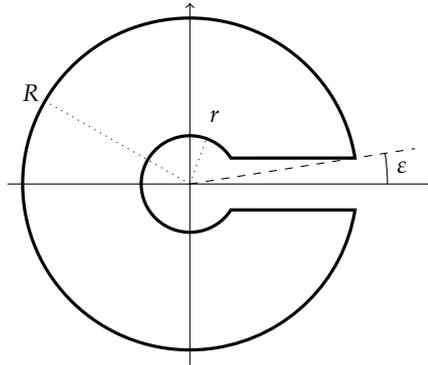
Sugerencia. Integrar sobre curvas similares al ejercicio anterior

- 2.12. (a) Sea $Q : \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ una función racional sin polos en $[0, +\infty)$ y fijemos $\alpha \in (0, 1)$. Si $\lim_{z \rightarrow \infty} Q(z) = 0$, mostrar que

$$(1 - e^{-2\pi i \alpha}) \int_0^{+\infty} \frac{Q(x)}{x^\alpha} dx = 2\pi i \sum_{z_i} \operatorname{Res} \left(\frac{Q(z)}{z^\alpha}, z_i \right),$$

donde la rama elegida de z^α es la obtenida tomando el argumento de z en $(0, 2\pi)$.

Sugerencia. Integrar a lo largo de la siguiente curva



y luego tomar los límites $R \rightarrow +\infty$, $r \rightarrow 0$ y $\epsilon \rightarrow 0$.

- (b) Calcular las siguientes integrales:

- (i) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x^2+1)} dx$;
- (ii) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x)} dx$
- (iii) $\int_0^\infty \frac{\sqrt[5]{x}}{x^3+x} dx$.

- 2.13. (a) Sea $Q : \mathbb{C}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ una función racional tal que el denominador no se anula sobre la circunferencia de centro 0 y radio 1, y sea $R : \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ la función definida por

$$R(z) = \frac{1}{z} Q \left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} \right).$$

Mostrar que

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos x, \operatorname{sen} x) dx = 2\pi \sum_{|z_i| < 1} \operatorname{Res}(R(z), z_i).$$

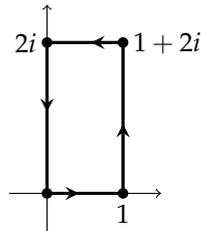
Sugerencia. Integrar sobre la curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, parametrizada por $z = e^{ix}, 0 \leq x \leq 2\pi$.

- (b) Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Calcular:

- (i) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \operatorname{sen} x}$, con $|a| > 1$;
- (ii) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b \cos x)^2}$ con $0 < b < a$;
- (iii) $\int_0^\pi \frac{\cos(2x)}{1 - 2a \cos x + a^2} dx$ con $|a| < 1$.

Teorema de Rouché y residuos en el infinito

3.14. Sea γ el rectángulo de vértices $0, 1, 1 + 2i$ y $2i$ recorrido en sentido positivo, y sea f una función meromorfa en \mathbb{C} tal que $f(z + 2i) = f(z)$ y $f(z + 1) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Probar que si f no tiene polos ni ceros sobre γ , la cantidad de ceros de f en el interior de γ es igual a la cantidad de polos de f en el interior de γ (contados con multiplicidad).



3.15. Mostrar que el polinomio $p(z) = 2z^5 + 7z - 1$ tiene una raíz real positiva de módulo menor que 1. Probar también que el resto de sus raíces están en $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

3.16. Mostrar que el polinomio $p(z) = z^5 + 15z + 1 = 0$ tiene una única raíz en el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{3}{2}\}$. ¿Tiene alguna raíz en $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 2\}$?

3.17. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha > 1$, probar que la ecuación

$$z^n e^{\alpha - z} = 1$$

tiene exactamente n raíces en $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

3.18. Calcular los residuos en ∞ de las siguientes funciones:

$$(a) f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}; \quad (b) f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(1+z)z}.$$

3.19. Sea C la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ recorrida en el sentido positivo. Calcular:

$$(a) \int_C \frac{z^2 + 3z - 1}{z^4 - 2} dz; \quad (b) \int_C \frac{e^{z + \frac{1}{z}}}{1 - z^2} dz.$$

Aplicaciones

4.20. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ la función dada por

$$f(z) = \log \frac{z+1}{z-1}$$

con la rama del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ y tal que $\log r \in \mathbb{R}$ para todo $r > 0$. Calcular $\int_C f(z) dz$, siendo C es la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ recorrida en sentido positivo.

4.21. Sea f una función holomorfa alrededor de z_0 . Probar que f es inyectiva en algún entorno de z_0 si y sólo si $f'(z_0) \neq 0$.

4.22. Sea f una función holomorfa e inyectiva en la bola $B_R(a)$ de centro a y radio R . Sea r tal que $0 < r < R$ y sea $\gamma = \partial B_r(a)$, orientada positivamente. Probar que para todo $w \in f(B(a, r))$ se tiene que

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{zf'(z)}{f(z) - w} dz.$$

4.23. Sea f una función holomorfa en el abierto $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ que no es constante y tal que $f(0) = 0$. Probar que existe un entorno Ω de 0 contenido en Δ y una función $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa e inyectiva tal que $g(\Omega) = \{|z| < s\}$ para algún s y $f(z) = g(z)^{\text{mult}(f,0)}$ para todo $z \in \Omega$.