Análisis Complejo
Segundo Cuatrimestre — 2011

Práctica 5: La fórmula de Cauchy y sus consecuencias

1. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entera y sea $R \in \mathbb{R}$ un número real positivo tal que $|f(z)| \leq M|z|^n$ si $|z| > R$. Probar que f es un polinomio de grado menor o igual que n.

2. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera. Supongamos que existe R_0 de modo que si $|z| = R \geq R_0$, se verifica $|f(z)| \leq R\phi(R)$, donde $\lim_{R\to\infty} \phi(R) = 0$. Probar que f es constante.

3. Hallar todas las funciones enteras $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ para las cuales es

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 5.$$

4. Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función armónica no suryectiva. Probar que:

(a) u está acotada superior o inferiormente.

(b) u es constante.

Deducir que toda función armónica es constante o suryectiva.

5. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera tal que existen dos números $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ que son $\mathbb{R}$-linealmente independientes y para los que es

$$f(z + z_0) = f(z + z_1) = f(z)$$

cualquiera sea $z \in \mathbb{C}$. Mostrar que f es constante.

6. *(a)* Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa no idénticamente nula. Si $a \in \Omega$ es tal que $f(a) = 0$, probar que existen $n \in \mathbb{N}$ y $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa con $g(a) \neq 0$ tales que $f(z) = (z - a)^n g(z)$ para todo $z \in \Omega$.

(b) Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa no idénticamente nula. Probar que el conjunto de ceros de f es discreto y en todo compacto de Ω la función f tiene sólo un número finito de ceros.

7. Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones enteras tal que para cada $z \in \mathbb{C}$, el conjunto de valores $\{f(z)/f \in \mathcal{F}\}$ es finito. Probar que la familia $\mathcal{F}$ es finita.

8. *(a)* ¿Existe una función $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ holomorfa y tal que

$$f(\tfrac{1}{2n}) = f(\tfrac{1}{2n+1}) = \tfrac{1}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$?

(b) ¿Existe una función $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que

$$f(\tfrac{1}{n}) = \tfrac{1}{3-2n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$?

9. Hallar todas las funciones enteras tales que

$$n^2 f(\tfrac{1}{n})^3 + f(\tfrac{1}{n}) = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

10. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto no vacío conexo y simétrico con respecto a $\mathbb{R}$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que para todo $z \in \Omega \cap \mathbb{R}$ es $f(z) \in \mathbb{R}$. Probar que para todo $z \in \Omega$ se tiene que

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}.$$

11. Dada la función

$$f : z \in B_1(0) \mapsto \cos \tfrac{1+z}{1-z} \in \mathbb{C},$$

mostrar que los ceros de f son los puntos de la forma $z_n = \frac{n\pi-2}{n\pi+2}$ con $n \in \mathbb{N}$ impar, que f es holomorfa en $B_1(0)$ y que los ceros de f tienen un punto de acumulación. ¿Es $f \equiv 0$ en $B_1(0)$? ¿Contradice esto algún resultado conocido?

12. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y sean $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ dos funciones holomorfas que no se anulan en Ω. Supongamos que existe una sucesión convergente $(a_n)_{n\geq 1}$ de puntos de Ω tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \Omega$, con $a_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que además

$$\frac{f'(a_n)}{f(a_n)} = \frac{g'(a_n)}{g(a_n)}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que existe una constante c tal que $f(z) = cg(z)$ en Ω.

13. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y sean $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ funciones holomorfas tales que $\overline{f}g$ es holomorfa en Ω. Demostrar que $g \equiv 0$ o f es constante.

14. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto acotado y conexo y sean $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^2$. Probar que el producto $\overline{PP_1} \cdot \ldots \cdot \overline{PP_n}$ de las distancias de un punto P en $\overline{\Omega}$ a los puntos $P_1, \ldots, P_n$ alcanza su máximo en un punto de la frontera de Ω.

15. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera tal que $f(0) = \frac{1}{2}$ y $|f(z)| \leq |e^z - \frac{1}{2}|$ para todo z en $\mathbb{C}$. Probar que $f(z) = e^z - \frac{1}{2}$ para todo z en $\mathbb{C}$.

16. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo con $\overline{\Omega}$ compacto y sean $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ funciones holomorfas en Ω y continuas en $\overline{\Omega}$. Probar que si $f = g$ sobre $\partial\overline{\Omega}$, entonces esta igualdad es también válida en Ω.

Sugerencia. Usar el principio del módulo máximo.

17. *(a)* Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto acotado y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω y continua en $\overline{\Omega}$. Probar que si $f \neq 0$ en Ω, entonces $|f|$ alcanza su valor mínimo en la frontera de Ω.

(b) Usar el item anterior para proporcionar una demostración del teorema fundamental del álgebra.

18. *(a)* Si $h(z)$ es holomorfa en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ y no es constante, probar que $Re(h)$ no puede alcanzar extremos en Ω.

(b) Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo con $\overline{\Omega}$ compacto y sean $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ funciones holomorfas en Ω y continuas en $\overline{\Omega}$. Probar que si $Re(f) = Re(g)$ sobre $\partial\overline{\Omega}$, entonces f y g difieren en una constante imaginaria.

19. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo con $\overline{\Omega}$ compacto y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω, continua en $\overline{\Omega}$ y no constante. Probar que si $|f|$ es constante sobre $\partial\overline{\Omega}$, entonces existe $z \in \Omega$ tal que $f(z) = 0$.

20. Sea $f : B_1(0) \to B_1(0)$ una función holomorfa. Probar que si existen dos números complejos distintos $a, b \in B_1(0)$ tales que $f(a) = a$ y $f(b) = b$, entonces $f(z) = z$ para todo $z \in B_1(0)$.

Sugerencia. Considerar la función $g(z) = \frac{h(z)-a}{1-\bar{a}h(z)}$ con $h(z) = f\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right)$ y usar el Lema de Schwarz.

21. Sean $f, g : B_1(0) \to B_1(0)$ funciones holomorfas y biyectivas. Probar que si f y g coinciden en dos puntos distintos de $B_1(0)$, entonces $f(z) = g(z)$ para todo $z \in B_1(0)$.

22. Encontrar todas las funciones holomorfas $f : B_1(0) \to B_4(1)$ tales que $f(0) = 3$ y $f(\frac{1}{2}) = 1$.

23. Si $f : B_1(0) \to B_1(0)$ es una función holomorfa con $f(0) = 0$ y $|f'(0)| = 1$, probar que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ y tal que $f(z) = \lambda z$ para todo $z \in B_1(0)$.

24. Encontrar todas las funciones holomorfas $f : B_1(0) \to B_2(0)$ tales que $f(0) = 1$ y $f'(0) = \frac{3}{2}$.