Análisis Complejo
Segundo Cuatrimestre — 2011
Práctica 4A: Ejercicios adicionales

1. Sea $\gamma(t) = e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$. Calcular:

(a) $\int_\gamma \overline{z}(z+3)\cos z \, dz$,

(b) $\int_\gamma \operatorname{sen} \overline{z} \, dz$.

2. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, f holomorfa en U y $z_0 \in U$. Si $f'(z_0) \neq 0$ y z_0 es el único cero de $f - f(z_0)$ en U, probar que:

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{f(z) - f(z_0)} = \frac{2\pi i}{f'(z_0)}$$

donde la circunferencia $|z - z_0| = r$ está contenida en U, y se recorre una vez en sentido positivo.

3. Sea $\gamma(t) = 2e^{it}$, con $t \in [0, 4\pi]$. Calcular:

$$\int_\gamma \frac{e^z + 1}{\operatorname{sen}(z+i)} \, dz$$

4. Sea $\gamma(t) = 2e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$, y sea $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ dada por:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{e^z - 1}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$

Demostrar que f no se anula en el interior de γ y calcular $\int_\gamma \frac{dz}{e^z - 1}$.