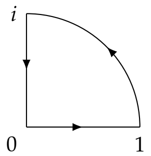
Análisis Complejo
Segundo Cuatrimestre — 2011

Práctica 4: Integrales

1. Calcular

(a) $\int_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z$ para $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{it} \in \mathbb{C}$.

(b) $\int_\gamma |z|^2 z\,\mathrm{d}z$ si γ es la curva, que comienza y termina en el origen, de la siguiente figura:



2. Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva, y definamos la curva

$$-\gamma : t \in [a, b] \mapsto \gamma(a + b - t) \in \mathbb{C}$$

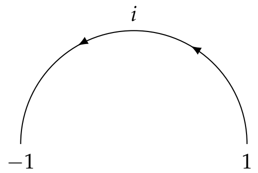
Mostrar que

$$\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

3. Sean $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{C}$, y sea $T : z \in \mathbb{C} \mapsto az + b \in \mathbb{C}$. Probar que si $c \in \mathbb{C}$ y γ es una curva en $\mathbb{C} \setminus \{c\}$, entonces

$$\int_{T\circ\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z - T(c)} = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - c}.$$

4. Si γ es la curva



mostrar que

$$\left|\int_\gamma \frac{\mathrm{sen}(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z\right| \leq \pi\frac{1+e}{2}.$$

5. Para cada $r > 0$ sea $\gamma_r : t \in [0, \pi] \mapsto re^{it} \in \mathbb{C}$. Mostrar que

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z = 0.$$

6. Si γ la curva del ejercicio **4**, calcular $\int_\gamma \cos(z)\,\mathrm{d}z$.

7. Sean $r > 0$, sean a, $b \in \mathbb{C}$ tales que $|b-a| \neq r$ y consideremos la curva $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto a + re^{it} \in \mathbb{C}$.

(a) Calcular $\int_\gamma (z-b)^n\,\mathrm{d}z$ para cada $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$.

(b) Si $|b-a| < r$, probar que $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-b} = 2\pi i$.

(c) Si $|b-a| > r$, probar que $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-b} = 0$.

8. Sea $f = u + iv$ una función continua en una región $R \subseteq \mathbb{C}$ y sea C un arco contenido en R y parametrizado por $(x(t), y(t))$ en el intervalo $[a, b]$. Probar que:

$$\int_C f(z)dz = \oint_C [u(x,y)dx - v(x,y)dy] + i\oint_C [u(x,y)dy + v(x,y)dx]$$

Deducir de ello que las propiedades de invariancia de las integrales complejas son consecuencia de las correspondientes propiedades de las integrales curvilíneas.

9. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, sean $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funciones. Sea además $\gamma \subset \Omega$ una curva en Ω. Si $f_n \to f$ uniformemente sobre Ω, probar que $\int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z \to \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$, siempre que todas las integrales involucradas tengan sentido.

10. Sea $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto a\cos t + ib \operatorname{sen} t \in \mathbb{C}$, de manera que la imagen de γ es la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Calcular $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}$ y deducir de ello que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a^2\cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

11. Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva y sea $w \in \mathbb{C}$ tal que $w \notin \gamma$. Sea $\eta(\gamma, w)$ el índice de la curva γ con respecto a w. Probar las siguientes afirmaciones:

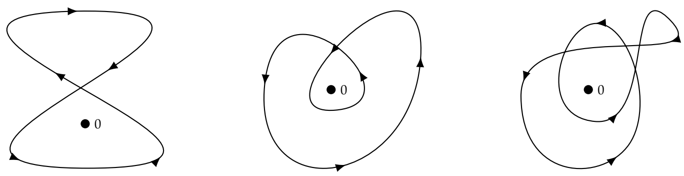
- Si $-\gamma$ es la curva del ejercicio **2**, entonces $\eta(\gamma, w) = -\eta(-\gamma, w)$.
- Si $M = \max_{t\in[a,b]} |\gamma(t)|$ y $|w| > M$, entonces $\eta(\gamma, w) = 0$.
- La función $i_\gamma : w \in \mathbb{C} \setminus \gamma \mapsto \eta(\gamma, w) \in \mathbb{R}$ es continua.
- La función i_γ es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

12. Determinar el valor de $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}$ para todas las curvas γ en $\mathbb{C}$ que son diferenciables, simples, cerradas y no pasan por $\pm i$.

13. Evaluar la integral

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z$$

para cada una de las siguientes curvas γ:



14. Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva diferenciable a trozos y sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto. Sea $\varphi : \gamma \times \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua y sea $g : \Omega \to \mathbb{C}$ la función tal que $g(z) = \int_\gamma \varphi(w, z)\, \mathrm{d}w$ para cada $z \in \Omega$.

(a) Probar que la función g es continua.

(b) Supongamos que:

- para todo $w \in \gamma$ la función $\varphi(w, -) : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa y
- $\frac{\partial\varphi(w,z)}{\partial z}$ es continua en w y z,

Probar que entonces g es holomorfa y $g'(z) = \int_\gamma \frac{\partial\varphi(w,z)}{\partial z}\, \mathrm{d}w$.

15. Sean $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva diferenciable a trozos y sea $f : \mathsf{Im}(\gamma) \to \mathbb{C}$ una función continua. Sea $g : \mathbb{C} \setminus \mathsf{Im}(\gamma) \to \mathbb{C}$ la función tal que

$$g(z) = \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, \mathrm{d}w$$

para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathsf{Im}(\gamma)$. Entonces g es holomorfa y

$$g^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}\, \mathrm{d}w$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

16. Calcular:

(a) $\int_\gamma \frac{e^z}{z-2}\, \mathrm{d}z$ con $\gamma : t \in [0, 2\pi] \to 4e^{it} \in \mathbb{C}$;

(b) $\int_\gamma \frac{z}{z+1}\, \mathrm{d}z$ con $\gamma : t \in [0, 2\pi] \to 1 + e^{ikt} \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{Z}$;

(c) $\int_\gamma \frac{\mathsf{sen}\, z}{z^3}\, \mathrm{d}z$ con $\gamma : t \in [0, 2\pi] \to e^{it} \in \mathbb{C}$;

(d) $\int_\gamma \frac{\mathsf{log}(1+z)}{(z-\frac{1}{2})^3}\, \mathrm{d}z$ con $\gamma : t \in [0, 2\pi] \to \frac{2}{3}e^{it} \in \mathbb{C}$;

(e) $\int_\gamma \frac{\mathsf{cos}(\pi z)}{(z^2-1)^2}\, \mathrm{d}z$ con $\gamma : t \in [0, 2\pi] \to 1 + e^{ikt} \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{Z}$.

17. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, sean $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funciones y supongamos que $f_n \to f$ uniformemente sobre cada compacto de Ω. Si f_n es holomorfa en Ω cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$, probar que f es holomorfa en Ω y que $f_n' \to f'$ uniformemente sobre cada compacto de Ω.

18. Sea $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$. Demostrar que la función $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ definida como:

$$f(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt^2}\, \mathrm{d}t, \qquad \text{para cada } z \in \mathcal{H}$$

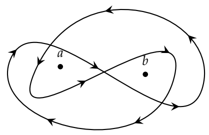
es holomorfa.

19. Sea $r > 0$, sea $B_r(0)$ el disco abierto de radio r centrado en 0, y sea $f : \overline{B_r(0)} \to \mathbb{C}$ una función continua que es holomorfa en $B_r(0)$. Probar que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

para todo $z \in B_r(0)$.

20. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, $a \neq b$, y sea γ la curva en la siguiente figura:



- Explicar porqué $\eta(\gamma, a) = \eta(\gamma, b) = 0$.
- *Convencerse* de que γ no es homotópica a cero en Ω. ¿Puede dar una explicación rigurosa de este hecho?

21. Probar que si Ω es simplemente conexo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces f tiene una primitiva en Ω. ¿Es necesaria la hipótesis de simplemente conexo?

22. Sea Ω un abierto simplemente conexo y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa y tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Sean $z_0 \in \Omega$ y $w_0 \in \mathbb{C}$ tales que $e^{w_0} = f(z_0)$.

1. Demostrar que existe una función holomorfa $g : \Omega \to \mathbb{C}$ que satisface $f(z) = e^{g(z)}$ para todo $z \in \Omega$ y $g(z_0) = w_0$. (Sugerencia: tomar g tal que $g' = \frac{f'}{f}$ y mostrar que $h = e^{-g} f$ es constante.)
2. Demostrar que tal g es única.
3. Decidir si, en las condiciones del ítem 1, vale que para todos $z_1, z_2 \in \Omega$, $f(z_1) = f(z_2) \Longrightarrow g(z_1) = g(z_2)$.
4. ¿Es necesaria la hipótesis de "simplemente conexo" en el ítem (a)?

23. Sean f y g dos funciones enteras. Probar que $f^2(z) + g^2(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$ si y sólo si existe una función entera h tal que $f(z) = \cos(h(z))$ y $g(z) = \mathrm{sen}(h(z))$.

Sugerencia. Sugerencia: notar que $1 = (f + ig)(f - ig)$, y que por lo tanto se tiene $(f + ig)(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$.