Análisis Complejo
Segundo Cuatrimestre — 2011

Práctica 3: Series

Series

1.1. Estudiar la convergencia de la serie cuyo término general es el siguiente:

(a) $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$,
(b) $a_n = \frac{n}{2n^2+3}$,
(c) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+5}}$,
(d) $a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$,
(e) $a_n = \operatorname{sen}\frac{1}{n^2}$.

1.2. Probar que la serie $\sum_{n\geq 2} a_n$, con $a_n = \frac{1}{n^p \log(n)^q}$ para cada $n \geq 2$, cumple lo siguiente:

(a) converge si $q > 0$ y $p > 1$;
(b) converge si $q > 1$ y $p = 1$;
(c) diverge si $q > 0$ si $p < 1$;
(d) diverge si $0 < q \leq 1$ y $p = 1$.

1.3. Encontrar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3 4^n} z^n$,
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n^n} z^n$,
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{n^2} z^n$,
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{n^2} z^n$,
(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^{n^2}$,
(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$.

1.4. *Criterio de Weierstrass.* Sea X un espacio métrico, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $u_n : X \to \mathbb{C}$ una función y sea $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos. Supongamos que $|u_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$. Probar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \text{ converge} \implies \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ converge uniformemente en } X.$$

1.5. *Sumación por partes.* Sean $(a_n)_{n\geq 0}$, $(z_n)_{n\geq 0}$ sucesiones de números complejos tales que la sucesión $(a_{n+1}z_n)_{n\geq 0}$ converge. Probar que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) z_n \text{ converge} \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z_n - z_{n-1}) \text{ converge.}$$

1.6. Sean $(a_n)_{n\geq 0}$ y $(z_n)_{n\geq 0}$ dos sucesiones de números complejos.

(a) *Criterio de Dedekind.* Demostrar que si $\lim a_n = 0$, si $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ converge absolutamente y si las sumas parciales de $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ están acotadas, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ converge.
(b) *Criterio de du Bois-Reymond.* Demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ converge absolutamente y si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ converge.

Sugerencia. Usar el ejercicio anterior.

1.7. *Criterio de Dirichlet.* Sea $(r_n)_{n\geq 1}$ una sucesión decreciente de números reales positivos que converge a 0 y sea $(z_n)_{n\geq 1}$ una sucesion de números complejos. Probar que si las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ están acotadas, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} r_n z_n$ converge.

Sugerencia. Usar el criterio de Dedekind.

1.8. Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias y estudiar el comportamiento en el borde del disco de convergencia:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} z^n$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} z^n$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n} z^n$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^n} z^n$,

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2-i)n^2} z^n$,

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(1+i)^n} z^n$,

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^{n^2}$,

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n^2}$,

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$,

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} z^n \operatorname{sen} n$,

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} z^{n(n+1)}$.

1.9. Describir el conjunto de valores de z para los cuales las siguientes series resultan convergentes:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+|z|}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+|z|}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z^{2n}}{7^n}$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{nz^n}$,

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n^2}$,

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inz}}{n+1}$,

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$,

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right)^n$ con $|\alpha| < 1$.

1.10. Sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos. Probar que los conjuntos de convergencia de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n} z^n$ coinciden.

1.11. Sea $k \in \mathbb{N}$. Probar que si el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es $\rho > 0$, entonces el de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n^k z^n$ es también ρ.

1.12. Determinar los términos de orden ≤ 3 en el desarrollo en serie de potencias de las siguientes funciones:

(a) $e^z \operatorname{sen} z$,

(b) $\operatorname{sen} z \cos z$,

(c) $\frac{e^z-1}{z}$,

(d) $\frac{e^z-\cos z}{z}$,

(e) $\operatorname{cosec} z$,

(f) $\tan z$.

1.13. Encontrar el desarrollo en serie de potencias de la función $f_n(z) = \frac{1}{(1+z)^n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sugerencia. Notar que $f_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} f_1^{(n-1)}$ ¿Porqué?.

1.14. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia ρ positivo. Probar que:

(a) $f(-z) = f(z)$ para todo z con $|z| < \rho$ si y sólo si $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ impar.

(b) $f(-z) = -f(z)$ para todo z con $|z| < \rho$ si y sólo si $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ par.

1.15. La *sucesión de Fibonacci* es la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ tal que

$$a_0 = 0,$$
$$a_1 = 1,$$

y

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ para cada } n \geq 2.$$

Consideremos la serie de potencias $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

1. Mostrar que la serie R tiene radie de convergencia positivo y que su suma es una función racional de z. Dar una expresión cerrada para esa suma.
2. Descomponiendo $R(z)$ en fracciones simples y usando la suma de la serie geométrica, obtener un nuevo desarrollo de $R(z)$ en serie de potencias.
3. Comparando ambos desarrollos, obtener finalmente una fórmula cerrada para el término general de la sucesión de Fibonacci.

Logaritmo y Raíces n-ésimas

2.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo. Una *rama del logaritmo* en Ω es una función continua $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $e^{g(z)} = z$ para todo $z \in \Omega$.

(a) Mostrar que toda rama del logaritmo es inyectiva y holomorfa en Ω.

(b) Probar que si g_1 y g_2 son dos ramas de logaritmo en Ω y si existe $z_0 \in \Omega$ tal que $g_1(z_0) = g_2(z_0)$, entonces $g_1 = g_2$.

(c) Probar que si existe una rama del logaritmo en Ω, entonces $0 \notin \Omega$ y $S^1 \nsubseteq \Omega$.

2.2. Sea $g : \Omega \to \mathbb{C}$ una rama del logaritmo y sean $b \in \mathbb{C}$ y $a \in \Omega$. Definimos $a^b = e^{b \cdot g(a)}$.

(a) Si $b \in \mathbb{N}$, probar que el valor de a^b no depende de la elección de g y que coincide con el producto $\underbrace{a \cdots a}_{b \text{ veces}}$.

(b) Determinar *todos* los valores que pueden tomar i^i, $(-1)^{\frac{3}{5}}$ y 1^π al considerar todas las posibles elecciones del logaritmo.

(c) Fijando una rama del logaritmo, mostrar que las funciones

$$h_1 : z \in \Omega \mapsto z^b \in \mathbb{C}$$

y

$$h_2 : z \in \mathbb{C} \mapsto a^z \in \mathbb{C},$$

definidas a partir de esa rama, son holomorfas.

(d) Sean $z \in \Omega$ y a, $b \in \mathbb{C}$ ¿Qué relación hay entre z^{a+b} y $z^a z^b$? Si además $z^a \in \Omega$, ¿qué relación hay entre z^{ab} y $(z^a)^b$? ¿Y si $b \in \mathbb{Z}$?

2.3. Sea $\log$ la rama principal del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Mostrar que para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\arctan t = \frac{1}{2i} \log \frac{i-t}{i+t}.$$

2.4. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ un abierto. Una *rama de la raíz n-ésima* en Ω es una función continua $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $g(z)^n = z$ para todo $z \in \Omega$. Si $g : \Omega \to \mathbb{C}$ es una rama de la raíz n-ésima, escribimos $\sqrt[n]{z}$ a $g(z)$.

(a) Probar que si $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, hay exactamente dos ramas de $\sqrt{z}$ en Ω. Darlas explícitamente.

(b) Demostrar que toda rama de la raíz cuadrada es holomorfa en su dominio.

(c) Probar que si Ω es conexo y si f es una rama de la raíz cuadrada en Ω, entonces f y $-f$ son *todas* las ramas.

2.5. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, sea $g(z)$ una rama del logaritmo definida en Ω y notemos $\sqrt[3]{z}$ a la rama de la función raíz cúbica definida en Ω tal que $\sqrt[3]{z} = e^{g(z)/3}$.

(a) Probar que cualquiera sea la rama g elegida para el logaritmo, $\sqrt[3]{z}$ pertenece a Ω para todo $z \in \Omega$.

(b) Encontrar todas las ramas g del logaritmo para las cuales se tiene que $g(\sqrt[3]{z}) = \frac{1}{3}g(z)$ para todo z en Ω.

(c) Probar que si en lugar de considerar el abierto Ω se considera en cambio $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, aumenta la cantidad de ramas que satisfacen la condición el item anterior.