ANÁLISIS COMPLEJO
Segundo cuatrimestre — 2011

Práctica 2: Ecuaciones de Cauchy-Riemann

1. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Probar que

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = a + ib \iff \lim_{z\to z_0} \mathrm{Re}(f(z)) = a \text{ y } \lim_{z\to z_0} \mathrm{Im}(f(z)) = b.$$

2. Sean $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y sean $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas por

$$f(x + iy) = u(x, y) + i\, v(x, y)$$

y

$$g(x, y) = \big(u(x, y), v(x, y)\big).$$

Supongamos que f es derivable en $z_0 = a + ib$.

(a) Probar que g es diferenciable en (a, b).

(b) Calcular

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

y

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih}$$

en términos de u y v. ¿Qué se deduce?

(c) ¿Qué relación hay entre $|f'(z_0)|$ y el jacobiano de $Dg(a, b)$?

3. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$f(x + iy) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3 + i(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & \text{si } x + iy \neq 0; \\ 0, & \text{si } x + iy = 0. \end{cases}$$

Mostrar que f es continua en 0 y que cumple las condiciones de Cauchy-Riemann pero que *no* es derivable.

4. Sea $z = x + iy$. Probar que la función:

$$\phi(x, y) = \begin{cases} Im(z^{-2}) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

satisface $\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$ en todo punto z, pero tiene una discontinuidad de tipo infinito en $z = 0$.

5. Analizar dónde son holomorfas las siguientes funciones de $z = x + iy$. Hallar $f'(z)$ en cada caso:

(a) $f(z) = y + ix$,
(b) $f(z) = \overline{z}$,
(c) $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2xy)$,
(d) $f(z) = x^2 + iy^2$,
(e) $f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$,
(f) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$,
(g) $f(z) = z^3 - 2z$,
(h) $f(z) = z^2 \cdot \overline{z}$,
(i) $f(z) = \frac{z+1}{1-z}$,
(j) $f(z) = \begin{cases} \frac{x+iy}{x^2+y^2}, & \text{si } z \neq 0; \\ 0, & \text{si } z = 0. \end{cases}$

Definición. Una función $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de tipo $\mathcal{C}^2$ se denomina *armónica* si $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Una función $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se llama *conjugada armónica* de u si la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ es holomorfa.

6. *(a)* Probar que si la parte real y la parte imaginaria de una función holomorfa son $\mathcal{C}^2$, entonces ambas son funciones armónicas. Deducir que si u es una función $\mathcal{C}^2$ que admite una conjugada armónica, entonces u es armónica.

(b) Probar que si v y $\tilde{v}$ son conjugadas armónicas de u, entonces v y $\tilde{v}$ difieren en una constante.

(c) Encontrar, cuando sea posible, conjugadas armónicas de las siguientes funciones:

1. $u_1(x, y) = x^2 - y^2$,
2. $u_2(x, y) = x^2 y^2$,
3. $u_3(x, y) = 2x(1 - y)$.

(d) Probar que si v es conjugada armónica de u, las curvas de nivel de u y v se cortan de manera ortogonal en todo punto donde f' no se anule.

Definición. Una *región* es un subconjunto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, conexo y no vacío.

7. Se dice que una función real continua w es *subarmónica* en una región R si verifica $w_{xx} + w_{yy} \geq 0$ allí. Probar que $w = |f(z)|^2$ es subarmónica en toda región donde f sea analítica.

8. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ una región.

(a) Probar que para todo z_0 y z_1 en Ω existe una curva γ de tipo $\mathcal{C}^1$ a trozos tal que $\gamma(0) = z_0$ y $\gamma(1) = z_1$.

(b) Probar que si f es holomorfa en Ω y $f' \equiv 0$ en Ω, entonces f es constante.

9. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Demostrar que:

(a) $\operatorname{Re}(f)$ es constante $\Rightarrow f$ es constante.
(b) $\operatorname{Im}(f)$ es constante $\Rightarrow f$ es constante.
(c) $|f|$ es constante $\Rightarrow f$ es constante.
(d) $\arg(f)$ es constante $\Rightarrow f$ es constante.
(e) $\overline{f}$ es holomorfa $\Rightarrow f$ es constante.

10. Sean $L_1, \ldots, L_n \subseteq \mathbb{C}$ n rectas distintas. Probar que si $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa y $g(\mathbb{C}) \subseteq L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n$ entonces g es constante.

11. Sea Ω un abierto simétrico respecto del eje real y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa. Mostrar que la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ es holomorfa.

12. *(a)* Encontrar todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que satisfacen $f(0) = 1$ y

$$f(x + iy) = e^x f(iy)$$

para cada $x, y \in \mathbb{R}$.

Sugerencia. Definir $c, s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de manera que sea $f(iy) = c(y) + is(y)$ para cada $y \in \mathbb{R}$ y mostrar que $c' = -s$ y que $s' = c$.

(b) Deducir que existe una única extensión $f(z)$ de la función exponencial real al plano complejo que es holomorfa y satisface la propiedad $f(z + w) = f(z)f(w)$.

13. Hallar todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que verifican:

$$f(x + iy) = f(x) + f(iy) + 2xyi$$

para cada $x, y \in \mathbb{R}$.

14. Regla de L'Hôpital. Sean f, g funciones holomorfas en z_0 que cumplen las condiciones $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$. Demostrar que:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Sugerencia. Mostrar que $f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \eta(z)(z - z_0)$ con $\lim_{z \to z_0} \eta(z) = 0$.

15. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{z \to i} \frac{z^{10}+1}{z^6+1}$,

(b) $\lim_{z \to 2i} \frac{z^2+4}{2z^2+(3-4i)z-6i}$,

(c) $\lim_{z \to e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{(z-e^{\frac{\pi i}{3}})z}{z^3+1}$,

(d) $\lim_{z \to i} \frac{z^2-2iz-1}{z^4+2z^2+1}$.

16. Sea $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una curva de clase $\mathcal{C}^1$, y sea $v = \gamma'(t_0)$ el número complejo que se obtiene transladando al origen el vector tangente a la curva en $t = t_0$. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa y sea $z = f'(\gamma(t_0))$. Probar que zv es el número complejo que se obtiene transladando al origen el vector tangente a la curva $f \circ \gamma$ en $t = t_0$.

17. Sean $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definidas por $\gamma_1(t) = t$ y $\gamma_2(t) = (1 + i)t$. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \operatorname{sen}(z) + z^4$. Calcular el ángulo en el que se cortan las curvas $f \circ \gamma_1$ y $f \circ \gamma_2$ en $t = 0$.