Análisis Complejo

Segundo Cuatrimestre — 2011

Práctica 1: Números complejos

Números complejos

1.1. Expresar los siguientes números en la forma $a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$:

(a) $(i+1)(i-1)(i+3)$,
(b) $(3-2i)^2$,
(c) $\frac{1}{-1+3i}$,
(d) $\frac{1+i}{i}$,
(e) $\frac{2+i}{2-i}$,
(f) $(1+i)^{100}$,
(g) $(1+i)^{65} + (1-i)^{65}$.

1.2. Sean z y w dos números complejos. Mostrar que:

(a) $\overline{z} = z$ si y sólo si $z \in \mathbb{R}$,
(b) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$,
(c) $\overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w}$,
(d) $\mathsf{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$,
(e) $\mathsf{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

1.3. *(a)* Probar que si $z \in \mathbb{C}$ es raíz del polinomio $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$ de $\mathbb{C}[X]$, entonces $\overline{z}$ es raíz de $\overline{a}_n X^n + \overline{a}_{n-1} X^{n-1} + \cdots + \overline{a}_0$.

(b) En particular, probar que si $p \in \mathbb{R}[X]$ es un polinomio con coeficientes reales y $z \in \mathbb{C}$ es una raíz de p, entonces $\overline{z}$ también lo es.

1.4. Determinar todas las soluciones complejas de la ecuación

$$iz^2 + (3-i)z - (1+2i) = 0.$$

1.5. Si $z \in \mathbb{C}$, el *módulo de z* es $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Probar que:

(a) si $z = a + bi$, es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$;
(b) $|zw| = |z|\,|w|$ y, si $w \neq 0$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$;
(c) $-|z| \leq \mathsf{Re}(z) \leq |z|$ y $-|z| \leq \mathsf{Im}(z) \leq |z|$;
(d) $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathsf{Re}(z\,\overline{w})$ y $|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\,\mathsf{Re}(z\,\overline{w})$;
(e) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\big(|z|^2 + |w|^2\big)$;
(f) $|z+w| \leq |z| + |w|$ y $|z-w| \geq |z| - |w|$.

Interpretar geométricamente las igualdades *(d)* y *(e)*, conocidas como "Teorema del coseno" y "Ley del paralelogramo", respetivamente.

1.6. Demostrar que la función

$$d : (z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mapsto |z - w| \in \mathbb{R}$$

es una métrica sobre $\mathbb{C}$.

1.7. Sean $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ y $c \in \mathbb{R}_{>0}$. Si $z = x + yi$, encontrar una condición sobre x, y, a, b y c equivalente a la ecuación

$$|z - \alpha| = c$$

y describir el lugar geometrico de sus soluciones.

1.8. Describir los siguientes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

(a) $|z - i + 3| = 5$,
(b) $|z - i + 3| \leq 5$,
(c) $\mathrm{Re}(2z + 3) \geq 0$,
(d) $\mathrm{Re}((1 + 2i)z) \geq 0$.

Función exponencial y funciones trigonométricas

Definición. La función $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es la dada por

$$\exp(z) = e^a \cdot (\cos b + i \operatorname{sen} b)$$

para cada $z = a + bi \in C$. La escribimos también $e^z = \exp(z)$.

2.1. *(a)* Probar que para todo $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene que $e^{w+z} = e^w e^z$.
(b) Describir el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : e^z = 1\}$.
(c) Probar que si $z, w \in \mathbb{C}$ son tales que $e^z = e^w$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = w + 2k\pi i$.
(d) Demostrar que cualquiera sea $z \in \mathbb{C}$, vale que $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$.

2.2. *(a)* Obtener la forma polar de los siguientes números:

1. $1 + i$,
2. $-5i$,
3. -3.

(b) Obtener la forma binomial de los siguientes números:

1. $3e^{i\frac{\pi}{4}}$,
2. $e^{-i\pi}$,
3. $\pi e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

2.3. *(a)* Para cada $n \in \{2, 3, 4, 5\}$, describir el conjunto de soluciones de la ecuación $z^n = 1$.
(b) Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Probar que hay exactamente n números complejos distintos tales que $z^n = \alpha$.

2.4. *(a)* Demostrar que la función $\exp$ es periódica de período $2\pi i$.
(b) Describir la imagen por $\exp$ de
1. el conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Im}(z) < 2\pi\}$.
2. el primer cuadrante.
3. la recta $\{t + it : t \in \mathbb{R}\}$.

2.5. *(a)* Probar que si $\theta \in \mathbb{R}$, entonces $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ y $\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

Definición. Generalizando estas igualdades, definimos para $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

y

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

(b) Probar que para todo $z \in \mathbb{C}$ se cumple

$$\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1$$

y

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z.$$

(c) Probar que las funciones $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ son periódicas de período 2π.

(d) Demostrar que las únicas soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} z = 0$ son las soluciones reales usuales. Ídem con $\cos z = 0$.

(e) Probar que para todo $z \in \mathbb{C}$, $\cos(\overline{z}) = \overline{\cos(z)}$ y $\operatorname{sen}(\overline{z}) = \overline{\operatorname{sen}(z)}$.

2.6. Describir los conjuntos $\{z \in \mathbb{C} : \cos z \in \mathbb{R}\}$ y $\{z \in \mathbb{C} : \sin z \in \mathbb{R}\}$.

2.7. *(a)* Demostrar que las funciones $\cos$, $\operatorname{sen} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son suryectivas.

(b) Encuentrar todas las soluciones de la ecuación $\cos z = \frac{5}{4}$.

2.8. Probar que si a, b, $b' \in \mathbb{R}$ y $|b| < |b'|$, entonces

$$|\cos(a + bi)| < |\cos(a + b'i)|$$

y

$$|\operatorname{sen}(a + bi)| < |\operatorname{sen}(a + b'i)|.$$

2.9. Probar que si $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, entonces

$$1 + z + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}.$$

A partir de ésto, obtener una fórmula cerrada para la suma

$$1 + \cos\theta + \cdots + \cos n\theta$$

con $0 < \theta < 2\pi$.

2.10. Probar que si a, $b > 0$, entonces

$$\arctan\left(\frac{1}{a+b}\right) + \arctan\left(\frac{b}{a^2 + ab + 1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{a}\right).$$

Sucesiones de números complejos

3.1. Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ y sea $z \in \mathbb{C}$.

(a) Probar que

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \iff \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z) \text{ y } \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(z).$$

(b) Probar que si $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, entonces $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z|$.

(c) Dar un ejemplo para mostrar que la afirmación recíproca del ítem anterior es falsa.

3.2. *(a)* Sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Determinar $\lim_{n\to\infty} \alpha^n$ cuando $|\alpha| < 1$ y cuando $|\alpha| > 1$. ¿Qué pasa cuando $|\alpha| = 1$?

(b) Probar que si $\alpha \in \mathbb{C}$ es tal que $|\alpha| < 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \alpha + \cdots + \alpha^n\Big) = \frac{1}{1-\alpha}.$$

3.3. Calcular, en caso de que existan, los límites de las siguientes sucesiones:

(a) $\frac{1}{n}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$,

(b) $n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$,

(c) $\cos(n\pi) + i\frac{\operatorname{sen}(\frac{n}{2})}{n^2}$,

(d) $\left(\frac{(-1)^n+1}{3}\right)^n$,

(e) ni^{2n+1}.

3.4. El *conjunto de Mandelbrot* $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{C}$ es el conjunto de los números $c \in \mathbb{C}$ para los cuales es acotada la sucesión $(z_n)_{n\geq 0}$ tal que

$$z_0 = c$$

y

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

para cada $n \geq 0$. Mostrar que $\mathcal{M} \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$.

Geometría del plano complejo

4.1. Sean z_1, z_2, z_3 tres números complejos distintos; ídem con w_1, w_2, w_3. Probar que son equivalentes:

(a) El triángulo de vértices z_1, z_2, z_3 es semejante al de vértices w_1, w_2, w_3.

(b) Se verifican las igualdades $\frac{z_1-z_2}{w_1-w_2} = \frac{z_2-z_3}{w_2-w_3} = \frac{z_3-z_1}{w_3-w_1}$.

(c) Se cumple que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$.

4.2. Sean z_1, z_2, z_3 tres números complejos distintos. Probar que son equivalentes:

(a) El triángulo de vértices z_1, z_2, z_3 es equilátero.

(b) $z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

Definición. Una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se denomina isometría si preserva distancias, es decir, si $|f(z) - f(w)| = |z - w|$ para todo par de números complejos z, w.

4.3. EL objetivo de este ejercicio es caracterizar todas las isometrías del plano complejo.

(a) Probar que si $f(z)$ es isometría y a, b son números complejos con $|a| = 1$, entonces $g(z) = af(z) + b$ también es isometría. Concluir de ésto que:

$$g(z) = \frac{f(z) - f(0)}{f(1) - f(0)}$$

es una isometría que verifica $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$.

(b) Sea $g(z)$ una isometría que verifica $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$. Si $w = g(z)$, probar que $Re(w) = Re(z)$ y por lo tanto que $g(i) = i$ o $g(i) = -i$.

(c) Si $g(i) = i$, probar que $Im(w) = Im(z)$ y deducir entonces que $g(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Análogamente, probar que si $g(i) = -i$ se cumple que $g(z) = \bar{z}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(d) Concluir que toda isometría del plano es de la forma $f(z) = cz + d$ o $f(z) = c\bar{z} + d$, con $c, d \in \mathbb{C}$ y $|c| = 1$.

El plano complejo ampliado y la esfera de Riemann

Definición. Sea $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y sea

$$S^2 = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

la esfera de radio 1 y centro $(0, 0, 0)$. Sea además $N = (0, 0, 1) \in S^2$. La *proyección estereográfica* es la función $\theta : S^2 \to \overline{\mathbb{C}}$ definida de la siguiente manera. Es $\theta(N) = \infty$ y, si $P \in S^2 \setminus \{N\}$ y si $(a, b, 0)$ es el punto de intersección de la recta $\overline{NP}$ con el plano $\pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$, entonces $\theta(P) = a + bi$.

5.1. *(a)* Probar que si $(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \setminus \{N\}$, entonces $\theta(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$.

(b) Demostrar que la función θ es biyectiva y su inversa $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \to S^2$ es tal que $\varphi(\infty) = N$ y

$$\varphi(z) = \Big(\frac{2\,\mathsf{Re}(z)}{1 + |z|^2}, \frac{2\,\mathsf{Im}(z)}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2}\Big)$$

si $z \in \mathbb{C}$.

(c) Describir los conjuntos $\varphi(\{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}(z) = 0\})$ y $\varphi(\{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Im}(z) = 0\})$.

5.2. Sea $\bar{d}$ la métrica sobre $\overline{\mathbb{C}}$ inducida por la distancia de $\mathbb{R}^3$ vía θ, de manera que si $z, z' \in \overline{\mathbb{C}}$, se tiene

$$\bar{d}(z, z') = d\big(\varphi(z), \varphi(z')\big)$$

con d es la métrica euclídea de $\mathbb{R}^3$.

(a) Probar que si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces

$$\bar{d}(z, w) = \frac{2|w - z|}{(1 + |z|^2)^{1/2}(1 + |w|^2)^{1/2}}$$

y

$$\bar{d}(z, \infty) = \frac{2}{(1 + |z|^2)^{1/2}}.$$

(b) Demostrar que la función $\bar{d}$ es una métrica en $\overline{\mathbb{C}}$ que, restringida a $\mathbb{C}$, es equivalente a la métrica usual.

(c) Demostrar que el espacio métrico $(\overline{\mathbb{C}}, \bar{d})$ es compacto y, por tanto, completo.

5.3. Sea C una circunferencia contenida en S^2. Mostrar que si C pasa por N, entonces su imagen por θ es una recta de $\mathbb{C}$, y que si C no pasa por N entonces su imagen es una circunferencia.

Homografías

Definición. Una *homografía* es una función $T : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ del tipo

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

con $ad - bc \neq 0$.

6.1. ¿Por qué se excluye el caso en que $ad - bc = 0$ en esta definición?

6.2. Probar que el conjunto $\mathcal{H}$ de las homografías es un grupo bajo la composición.

6.3. Sean z_1, z_2, $z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ tres puntos distintos. Probar que existe una única homografía T tal que

$$T(z_1) = 0, \qquad T(z_2) = 1, \qquad T(z_3) = \infty.$$

Deducir de ésto que si $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ es otra terna de puntos distintos, existe una única homografía que aplica z_1 en w_1, z_2 en w_2 y z_3 en w_3.

6.4. *(a)* Encontrar todas las homografías que transformen

(i) los puntos $0, i, -i$ en $0, 1, \infty$;

(ii) los puntos $0, i, -i$ en $1, -1, 0$.

(b) Mostrar que la imagen de la circunferencia de centro 0 y radio 1 por la primera homografía del ítem anterior es la recta $\{\mathsf{Re}(z) = 1\}$.

6.5. Probar que si $\alpha \in \mathbb{C}$ es tal que $|\alpha| \neq 1$, entonces la homografía $T \in \mathcal{H}$ tal que

$$T(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$$

transforma la circunferencia $\{|z| = 1\}$ en sí misma y a α en 0.

6.6. Sean A, $B \in \mathsf{GL}_2(\mathbb{C})$ dos matrices no singulares que representan a las homografías T_1 y T_2, respectivamente.

(a) ¿Qué homografía representa la matriz AB?

(b) ¿Qué homografía representa la matriz A^{-1}?

(c) ¿Qué homografías representan las matrices diagonales?

(d) ¿Cuándo dos matrices distintas representan la misma homografía?

6.7. Demostrar que una homografía $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ aplica $\overline{\mathbb{R}}$ en $\overline{\mathbb{R}}$ si y sólo si se puede escribir con coeficientes reales.

Definición. Si z_1, z_2, z_3, z_4 son puntos distintos de $\overline{\mathbb{C}}$, la *razón doble* es

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2} \in \overline{\mathbb{C}}$$

6.8. Probar que la razón doble (z_1, z_2, z_3, z_4) es la imagen de z_1 bajo la homografía T tal que $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = 1$ y $T(z_4) = \infty$.

6.9. *(a)* Probar que si $T : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ es una homografía, entonces

$$(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

para cada elección de cuatro puntos distintos z_1, z_2, z_3, $z_4 \in \mathbb{C}$.

(b) Demostrar que los puntos z_1, z_2, z_3, z_4 están en una recta o circunferencia de $\mathbb{C}$ si y sólo si $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.

Definición. Sea C una recta o circunferencia de $\overline{\mathbb{C}}$ y sean z_2, z_3, z_4 tres puntos distintos de C. Dos puntos z y z^* de $\overline{\mathbb{C}}$ son *simétricos respecto de* C sii $\overline{(z, z_2, z_3, z_4)} = (z^*, z_2, z_3, z_4)$.

6.10. *(a)* Probar que la definición anterior depende solamente de C y no de la elección de los tres puntos z_2, z_3, z_4.

(b) Probar que para cada punto $z \in \overline{\mathbb{C}}$ existe exactamente un punto $z^* \in \overline{\mathbb{C}}$ simétrico a z respecto de C. Esto nos permite definir una aplicación

$$\sigma_C : z \in \overline{\mathbb{C}} \mapsto z^* \in \overline{\mathbb{C}},$$

a la que llamamos la *simetría* con respecto a C.

(c) Probar que si $T : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ es una homografía tal que $T(\overline{\mathbb{R}}) = C$, entonces $\sigma_C = T \circ \overline{T^{-1}}$.

(d) Probar que si S es una homografía y z y z^* son puntos simétricos respecto de C, entonces $S(z)$ y $S(z^*)$ son simétricos respecto de $S(C)$.

6.11. Probar que si $C \subset \mathbb{C}$ es una circunferencia y z es su centro, entonces el punto simétrico de z con respecto a C es ∞.

6.12. Mostrar que si C es una recta, esta nueva noción de simetría con respecto a C coincide con la simetría usual.

6.13. Probar que si z_1, z_2 y z_3 son tres puntos distintos de $\overline{\mathbb{C}}$, entonces existe una única recta o circunferencia que pasa por z_1 y con respecto a la cual z_2 y z_3 son simétricos.

6.14. Encontrar homografías que transformen

(a) a la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ en $\{z \in \mathbb{C} : |z + 1| = 1\}$ y a los puntos -2 y 0 en 0 e i;

(b) al semiplano superior $H^+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ en $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y a $\alpha \in H^+$ en 0.

6.15. Sea $S(z) = \frac{7z+15}{-2z-4}$. Sea $(z_n)_{n \geq 1}$ la sucesión tal que $z_1 = 1$ y $z_{n+1} = S(z_n)$ para cada $n \geq 1$. Calcule $\lim_{n \to \infty} z_n$.