

# Análisis II—Análisis matemático II—Matemática 3.

2do. cuatrimestre de 2011

## Práctica 2 - Integrales de superficie.

**Definición .1.** Una superficie paramétrica (superficie a secas para nosotros) es un conjunto de puntos del espacio que puede describirse por medio de dos parámetros. Más precisamente,  $\mathcal{S}$  es una superficie si existen funciones continuas  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  definidas en un dominio elemental  $D \subset \mathbb{R}^2$  tales que  $(x, y, z) \in \mathcal{S}$  si y sólo si existe  $(u, v) \in D$  con  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$ .

En este caso, llamamos a  $T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  una parametrización de  $\mathcal{S}$ .

**Definición .2.** Sea  $\mathcal{S}$  una superficie,  $P_0 \in \mathcal{S}$  y  $\Pi_0$  un plano por  $P_0$ . Sea  $\nu_0$  un vector de longitud 1 perpendicular a  $\Pi_0$ . Decimos que  $\Pi_0$  es el plano tangente a  $\mathcal{S}$  en  $P_0$  si la recta por  $P$  y  $P_0$  con  $P \in \mathcal{S}$  tiende a ser perpendicular a  $\nu_0$  a medida que  $P$  se acerca a  $P_0$ . Más precisamente, si

$$\frac{P - P_0}{\|P - P_0\|} \cdot \nu_0 \rightarrow 0 \quad \text{cuando } P \rightarrow P_0 \text{ con } P \in \mathcal{S}.$$

Aquí  $v \cdot w$  denota el producto escalar de los vectores  $v$  y  $w$ .

**Observación .1.** Sea  $P_0 \in \mathcal{S}$  y  $\nu_0$  un vector de norma 1. Sea  $\Pi_0$  el plano perpendicular a  $\nu_0$  por  $P_0$ . Entonces  $\Pi_0$  es el plano tangente a  $\mathcal{S}$  en  $P_0$  si y sólo si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $P \in \mathcal{S}$  y  $\|P - P_0\| < \delta$  se sigue que

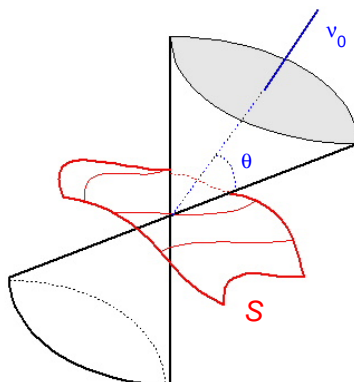
$$(1) \quad \left| \frac{P - P_0}{\|P - P_0\|} \cdot \nu_0 \right| < \varepsilon.$$

Como

$$\frac{P - P_0}{\|P - P_0\|} \cdot \nu_0 = \cos \alpha(P)$$

donde  $\alpha(P)$  es el ángulo entre el vector  $P - P_0$  y  $\nu_0$ , la condición (1) dice que, en la bola  $B_\delta(P_0)$ , la superficie  $\mathcal{S}$  queda fuera del cono de eje  $\nu_0$  y apertura  $\theta \in [0, \pi/2]$  donde  $\cos \theta = \varepsilon$ .

Como  $\varepsilon > 0$  es arbitrario, la condición geométrica que caracteriza al plano tangente en  $P_0$  es que para todo cono con eje  $\nu_0$ , exista un entorno de  $P_0$  tal que, en ese entorno, la superficie  $\mathcal{S}$  queda fuera del cono.



**Proposición .1.** Sea  $\mathcal{S}$  una superficie. Si existe una parametrización  $T : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  inyectiva, diferenciable en  $(u_0, v_0) \in D$  tal que los vectores derivados  $T_u(u_0, v_0)$ ,  $T_v(u_0, v_0)$  no son paralelos y son no nulos, el plano  $\Pi_0$  por  $P_0 = T(u_0, v_0)$  que determinan estos dos vectores derivados es tangente a  $\mathcal{S}$  en  $P_0$ .

**Observación .2.** En este caso se puede tomar

$$\nu_0 = \frac{T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)}{\|T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)\|}$$

donde  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$  denota el producto vectorial de  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$ .

Si  $\nu_0 = (a_0, b_0, c_0)$ , la ecuación del plano tangente es (aquí  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ),

$$\Pi_0 : a_0(x - x_0) + b_0(y - y_0) + c_0(z - z_0) = 0.$$

Notemos que no es necesario tomar un versor  $\nu_0$  para encontrar la ecuación de  $\Pi_0$ . Es decir, si

$$T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0) = (a, b, c),$$

se tiene

$$\Pi_0 : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

**Definición .3.** Una superficie  $\mathcal{S}$  es suave si tiene plano tangente en todos sus puntos y la recta  $L(P)$  perpendicular al plano tangente en  $P \in \mathcal{S}$  varía continuamente con  $P$ .

**Proposición .2.** Si  $\mathcal{S}$  es una superficie que tiene una parametrización  $T : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  inyectiva,  $C^1$ , con  $T_u \times T_v \neq 0$  para todo  $(u, v) \in D$ , se tiene que  $\mathcal{S}$  es suave.

**Definición .4.** A una parametrización  $T$  con las propiedades de la Proposición .2 la llamamos “regular”.

**Proposición .3.** Sea  $\mathcal{S}$  el gráfico de una función  $C^1$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  con  $D \subset \mathbb{R}^2$  un dominio elemental. Entonces  $\mathcal{S}$  es una superficie suave y la ecuación del plano tangente en el punto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  es

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

**Proposición .4.** Sea  $\mathcal{S}$  una superficie dada en forma implícita por

$$\mathcal{S} : F(x, y, z) = 0$$

donde  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^1$  y  $\nabla F(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  para todo  $(x, y, z)$ .

Entonces,  $\mathcal{S}$  es una superficie suave y la ecuación del plano tangente en el punto  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$  es

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

**Definición .5.** Sea  $\mathcal{S}$  una superficie suave y  $T : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de  $\mathcal{S}$ . Sea  $D_1 \subset \mathbb{R}^2$  un dominio elemental y  $G : D_1 \rightarrow D$  una biyección,  $C^1$  con Jacobiano no nulo. (Es decir,  $|DG(u, v)| \neq 0$  para todo  $(u, v) \in D_1$ ). Sea  $T_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $T_1(u, v) = T(G(u, v))$ . Llamamos a  $T_1$  una **reparametrización** de  $T$ .

**Proposición .5.** Sean  $\mathcal{S}$ ,  $T$  y  $T_1$  como en la Definición .5. Entonces,  $T_1$  es una parametrización regular de  $\mathcal{S}$ . Más aún,  $T_{1u}(u, v) \times T_{1v}(u, v) = (T_u(G(u, v)) \times T_v(G(u, v))) \mathcal{J}_G(u, v)$  donde  $\mathcal{J}_G$  es el determinante de la matriz asociada al diferencial de  $G$ .

**Ejercicio 1.** Dadas las siguientes superficies en coordenadas esféricas, determinar su correspondiente ecuación en coordenadas cartesianas y graficar

1.  $r = k$  ( $k = cte$ ).
2.  $\varphi = k$ ,  $k \in (0, \pi/2]$  constante.

En cada uno de los casos anteriores dé un vector normal en cada punto.

**Ejercicio 2.** 1. Mostrar que  $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$  y  $\Phi_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^3$  dadas por

$$\Phi_1(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right) \quad (a, b \text{ no nulos})$$

$$\Phi_2(u, v) = (au \cos(v), bu \sin(v), u^2)$$

son dos parametrizaciones del **paraboloide elíptico**.

2. Mostrar que

$$\Phi(u, v) = ((a + b \cos(u)) \sin(v), (a + b \cos(u)) \cos(v), b \sin(u))$$

$0 < b < a$ , y  $u, v \in [0, 2\pi]$ , es una parametrización del **toro**.

**Ejercicio 3.** Considerar la superficie dada por la parametrización

$$x = u \cos(v) \quad y = u \sin(v) \quad z = u$$

Es diferenciable esta parametrización? Es suave la superficie?

**Ejercicio 4.** Sea  $\mathcal{C}$  la curva en el plano  $xy$  dada en polares por:

$$r = 2 - \cos \theta \quad \text{para} \quad -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

Sea  $S$  la superficie que se obtiene por **revolución** de esta curva alrededor del eje  $y$ .

1. Dar una parametrización de  $S$ .
2. ¿Es suave esta superficie?

No desespere y siga hasta el final.

**Ejercicio 5.** Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera de radio  $a$  y centro en el origen en un punto  $(x_0, y_0, z_0)$  genérico de la esfera.

**Ejercicio 6.** Encontrar una ecuación para el plano tangente en el punto  $(0,1,1)$  a la superficie dada por la parametrización

$$x = 2u, \quad y = u^2 + v, \quad z = v^2.$$

**Ejercicio 7.** Probar la Proposición .5

**Proposición .6.** Sea  $\mathcal{S}$  una superficie suave y  $T : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de  $\mathcal{S}$ . Sea  $T_1 : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una reparametrización de  $T$ . Sea  $f$  una función continua sobre  $\mathcal{S}$ . Entonces, el cálculo de  $\int_{\mathcal{S}} f dS$  da el mismo resultado cuando se utiliza la parametrización  $T$  o la parametrización  $T_1$ .

**Ejercicio 8.** Probar la Proposición .6.

**Ejercicio 9.** Sea  $\phi(r, \theta) : [0, 1] \times [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^3$  dada por

$$x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta) \quad z = \theta$$

la parametrización de una superficie  $\mathcal{S}$ . Graficar  $\mathcal{S}$ , hallar un vector normal en cada punto y hallar su área.

**Ejercicio 10.** Sea  $\phi(u, v) : D \mapsto \mathbb{R}^3$  ( $D$  el disco unitario centrado en el origen)

$$\phi(u, v) = (u - v, u + v, uv)$$

la parametrización de una superficie. Calcular su área.

**Ejercicio 11.** Calcular el área de la superficie  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  con  $(x - R/2)^2 + y^2 \leq (R/2)^2$ . (bóveda de Viviani).

**Ejercicio 12.** Sea la curva  $z = f(x)$   $x \in [\alpha, \beta]$  con  $f$  y  $\alpha$  positivos, girada alrededor del eje  $z$ . Mostrar que el área de la superficie barrida es

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Aplicar a la superficie dada en el ejercicio (2) ítem a) para calcular el área del paraboloides elíptico con  $1 \leq z \leq 2$ , y  $a = b = 1$ .

**Ejercicio 13.** Sea  $\mathcal{C}$  la curva

$$\begin{cases} x = \cos^3 \theta \\ y = \sin^3 \theta \end{cases}$$

con  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  en el plano  $xy$ . Sea  $S$  la superficie que se obtiene al girar la curva  $\mathcal{C}$  alrededor del eje  $z$

1. Hallar una parametrización de  $S$ .
2. Hallar el área de  $S$ .

**Ejercicio 14.** Calcular  $\int_S xy \, dS$  donde  $S$  es el borde del tetraedro con lados  $z = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + z = 1$  y  $x = y$ .

**Ejercicio 15.** Calcular  $\int_S (x + y + z) dS$  donde  $S$  es el borde de la bola unitaria, es decir

$$S = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

**Ejercicio 16.** Hallar la masa de una superficie esférica de radio  $r$  tal que en cada punto  $(x, y, z) \in S$  la densidad de masa es igual a la distancia entre  $(x, y, z)$  y el punto  $(0, 0, r)$ .

**Definición .6.** Decimos que una superficie  $\mathcal{S}$  es orientable si hay una forma de elegir en cada punto  $P$  de  $\mathcal{S}$  un único versor normal  $\nu(P)$  de modo que la función vectorial que esta elección define sobre  $\mathcal{S}$  resulte continua.

Por ejemplo, si  $\mathcal{S}$  es un gráfico,  $\mathcal{S} : z = f(x, y)$ , se puede elegir en todos los puntos un versor normal que apunte hacia arriba (es decir, con componente  $z$  positiva). Esta elección es continua en  $\mathcal{S}$ .

Si  $\mathcal{S}$  es el borde de una región  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  de tipos I, II o III, se puede elegir como  $\nu(P)$  la normal que apunta hacia afuera de  $\Omega$ .

**Proposición .7.** Sea  $\mathcal{S}$  una superficie suave y  $T : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de  $\mathcal{S}$ . Para cada  $P \in \mathcal{S}$ , sea

$$\nu(P) = \frac{T_u(u, v) \times T_v(u, v)}{\|T_u(u, v) \times T_v(u, v)\|}, \quad \text{donde } (u, v) \text{ es tal que } P = T(u, v).$$

Entonces, esta elección de versor normal orienta la superficie  $\mathcal{S}$ . En este caso, decimos que  $\mathcal{S}$  está orientada por la parametrización  $T$ .

**Definición .7.** Sea  $\mathcal{S}$  una superficie orientada por el versor normal  $\nu(P)$ . Sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial continuo sobre  $\mathcal{S}$ . Llamamos flujo de  $\mathbf{F}$  a través de  $\mathcal{S}$  a la integral

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} := \int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS.$$

**Proposición .8.** Sea  $\mathcal{S}$  una superficie suave orientada por la parametrización regular  $T : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Sea  $T_1 : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una reparametrización de  $T$  que preserva la orientación. Sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial continuo sobre  $\mathcal{S}$ . Entonces, el cálculo de  $\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$  da el mismo resultado cuando se utiliza la parametrización  $T$  o la parametrización  $T_1$ . Si  $T_1$  invierte la orientación, los cálculos difieren sólo en el signo.

**Ejercicio 17.** Probar la Proposición .8.

**Ejercicio 18.** Evaluar el flujo saliente del campo  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$  a través de la superficie del cubo  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ .

**Ejercicio 19.** Si la temperatura en un punto de  $\mathbb{R}^3$  está dada por la función  $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$ , calcular el flujo de calor (es decir el flujo del campo  $-\nabla T$ ) a través de la superficie  $x^2 + z^2 = 2$ ,  $0 \leq y \leq 2$ , orientada de forma que la normal en el punto  $(0, 0, \sqrt{2})$  sea  $(0, 0, 1)$ .

**Ejercicio 20.** Sea  $S$  la superficie de la esfera unitaria orientada según la normal exterior. Sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial y  $F_r$  su componente radial. Probar que

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F_r \sin(\phi) d\phi d\theta$$

**Ejercicio 21.** Sea  $S$  la parte del cono  $z^2 = x^2 + y^2$  con  $z$  entre 1 y 2 orientada con la normal apuntando hacia el exterior del cono. Calcular  $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$  con  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ .

**Ejercicio 22.** Sean  $S$  una superficie orientada y  $C$  una curva cerrada simple que es el borde de  $S$  con alguna de sus dos posibles orientaciones. Verificar que si  $\mathbf{F}$  es un campo gradiente ( $\mathbf{F} = \nabla f$ ) entonces

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

**Ejercicio 23.** Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, x^2, yx^2)$  que representa el campo de velocidad de un fluido (velocidad medida en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan el plano  $xy$  a través del cuadrado  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ .