Análisis I – Matemática I – Análisis II (C) – Análisis Matemático I (Q)
Segundo Cuatrimestre - 2011

Práctica 5: Extremos

1. Sea $f(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$, calcular máximos y mínimos absolutos en el intervalo [-5,5]. Hacer un gráfico aproximado de la función.

2. La empresa *Petzi-Cool* quiere fabricar "Naranjzi", un nuevo producto sabor naranja que saldrá al mercado envasado en latitas. ¿Cuál debe ser la relación entre el radio de la base y la altura de la lata para que Petzi-Cool minimice el costo de aluminio?

3. (a) Calcular los extremos de $f(x, y) = x^2+y^4$ y de $g(x, y) = x^4+y^4$ y sus hessianos en dichos puntos.

   (b) Sea f de clase C^2 tal que tiene un extremo estricto en $a \in \mathbb{R}^n$. ¿Es necesariamente $Hf(a)$ definida positiva o negativa?

4. Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones y analizar cuáles son puntos de ensilladura:

   (a) $f(x, y) = x^2 - y^2$

   (b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x$

   (c) $f(x, y) = xy$

   (d) $f(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2 y}} & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad xy = 0 \end{cases}$

5. Sea $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$. Probar que:

   (a) $(0, 0)$ es un punto de ensilladura.

   (b) El determinante de la matriz $Hf(0, 0)$ es cero.

   (c) f tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$ sobre cada recta que pase por $(0, 0)$, es decir, si $g(t) = (at, bt)$ entonces $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un mínimo relativo en 0 para cada elección de a, b.

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$

   (a) Probar que $(0, 0)$ es un punto crítico pero no extremo.

   (b) Probar que $\pm\sqrt{2}(1, -1)$ son mínimos absolutos. ¿Hay máximos relativos?

7. Para las siguientes funciones, encontrar los puntos críticos y analizar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos de ensilladura. Si fuera necesario realice el mapa de gradientes para analizar lo pedido.

   (a) $f(x, y) = (2x + 1 - y)^2$

   (b) $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y + 1$

(c) $f(x,y) = 10x^2 + 10y^2 + 12xy + 2x + 6y + 1$

(d) $f(x,y) = e^{1+x^2+y^2}$

(e) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + xy$

(f) $f(x,y) = (x-y)^2 + 1 + 2(x-y)$

(g) $f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$

(h) $f(x,y,z) = xy + z^2$

(i) $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2xz + z$

(j) $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$

(k) $f(x) = \frac{1}{1+||x||^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que:

$$f(0,1) = 0, \nabla f(0,1) = (0,2) \text{ y } Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definida por $g(x,y) = 3x^2y + e^{f(x,y)} - 2y$

(a) Calcular $Hg(0,1)$

(b) ¿Tiene g un extremo relativo en $(0,1)$?

9. Sea $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - 3yx^2$.

(a) Probar que el punto $(0,0)$ es punto crítico de f y calcular el Hessiano en dicho punto.

(b) Probar que f a lo largo de cualquier recta tiene un mínimo en el origen.

(c) Muestre que el origen es punto silla de f y analice por qué esto no contradice el punto anterior. (Sugerencia: considere la trayectoria $\alpha(t) = (t, \frac{3}{2}t^2)$).

10. Decidir si existen o no, números reales a y b tales que la función

$$f(x,y) = e^{y^4 - x^2} + a(x-y) + b(x-2)(y-1)$$

tenga un mínimo relativo en el punto $(2,1)$.

11. Si el polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x,y)$ en $(0,0)$ es

$$P(x,y) = 1 + 2x - y + xy - x^2 + y^2$$

¿Tiene $g(x,y) = f(x,y) - 2x + y + x^2y$ un mínimo local en $(0,0)$?