Álgebra Lineal - Comentarios sobre la clase del 25 de diciembre

En la práctica 9, el ejercicio 19 dice lo siguiente.
Sean $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ las rectas definidas por

$$\begin{aligned} L_1 &= \big\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - 3.x_3 = 0\,,\, x_2 - x_3 = -2\big\} \quad \text{y} \\ L_2 &= \big\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - 6.x_3 = 1\,,\, x_2 + 2.x_3 = 0\big\}\,. \end{aligned}$$

Hallar una recta $L \subseteq \mathbb{R}^3$ que pase por el punto $(1,0,2)$ y corte a L_1 y a L_2.

¿El problema tendrá solución para cualquier par de rectas alabeadas y cualquier punto de $\mathbb{R}^3$ no perteneciente a ninguna de ellas? Es decir, ¿es cierto el siguiente enunciado?

Sean L_1 y L_2 dos rectas alabeadas en $\mathbb{R}^3$ y sea $A \in \mathbb{R}^3$ no perteneciente a ninguna de las rectas. Entonces existe una recta L tal que $A \in L$ y L interseca a las dos rectas L_1 y L_2.

La respuesta es que no. Fijadas L_1 y L_2, hay algunos puntos A para los que el problema no tiene solición.
Por ejemplo, si el punto A es tal que L_2 es paralela al plano generado por L_1 y A ($\pi = L_1 \vee A$), entonces no existe la recta L buscada. Esto se debe a que, al intersecar L_1 y tener al punto A, L ha de estar necesariamente contenida en el plano que generan.
Veamos cuáles son estos puntos problemáticos. Si notamos $L_i = S_i + P_i$, los puntos A para los cuales se tiene

$$L_2 \parallel \pi = L_1 \vee A = (S_1 + < A - P_1 >) + P_1$$

son los que se encuentran en $(S_1+S_2)+P_1$, la "suma" mal hecha entre las variedades L_1 y L_2, que es un plano al cual ambas rectas son paralelas, y que pasa por P_1.

En efecto, si $A \in (S_1+S_2)+P_1$ (y sabiendo que $A \notin L_1$), se tiene que $A-P_1 \in S_1+S_2$, $A-P_1 \notin S_1$, con lo cual $S_1 + S_2 = S_1 + < A - P_1 >$. Por lo que

$$L_2 \parallel (S_1+S_2) + P_1 = (S_1 + < A - P_1 >) + P_1 = L_1 \vee A.$$

Recíprocamente se puede ver que si $L_2 \parallel L_1 \vee A$, entonces $A \in (S_1 + S_2) + P_1$.

Es claro que lo mismo pasará si el punto A y la recta L_2 generan un plano al cual L_1 es paralela.

Ya vimos que en estos casos el problema no tiene solución. Veamos que sí la tiene en el resto de los casos, es decir, cuando $L_i \nparallel L_j \vee A$.

Como L_2 no es paralela al plano $L_1 \vee A$, entonces lo corta, digamos en un punto B. Sea L la única recta que pasa por A y B. Veamos que ésta es la recta buscada. Claramente se cumple que $A \in L$ y $L \cap L_2 \neq \emptyset$. Además, como L y L_1 están contenidas en el plano $L_1 \vee A$, basta ver que no son paralelas para deducir que se cortan. Por último, para probar que no son paralelas, basta con observar que

$$L = < A - B > + A \subseteq (S_2 + < A - B >) + A = L_2 \vee A,$$

es decir que la recta L está contenida en el plano $\pi' = L_2 \vee A$, al cual L_1 no es paralela por hipótesis.

Conclusión

El problema tiene solución si y sólo si $A \notin (S_1 + S_2) + P_1$ y $A \notin (S_1 + S_2) + P_2$.