Álgebra III

Práctica 9 – Segundo Cuatrimestre de 2011

Teoría de Números

Ejercicio 1. Sea $K = \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$, con $m \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados.

i) Probar que:

$$\mathcal{O}_K = \begin{cases} \{a + b\sqrt{m};\ a, b \in \mathbb{Z}\} & \text{si } m \equiv 2 \text{ ó } 3(4) \\ \left\{\frac{a+b\sqrt{m}}{2};\ a, b \in \mathbb{Z},\ a \equiv b(2)\right\} & \text{si } m \equiv 1(4) \end{cases}$$

ii) Calcular una base de $\mathcal{O}_K$ como $\mathbb{Z}$-módulo y calcular el discriminante en cada caso.

Ejercicio 2. Sea $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$.

i) Mostrar que 2 no es primo en $\mathcal{O}_K$.

ii) Probar que $\langle 2, 1 + \sqrt{-5}\rangle$ es un ideal primo de $\mathcal{O}_K$.

Ejercicio 3. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un primo impar. Sea $I = p\mathbb{Z}[i] \subseteq \mathbb{Z}[i]$. Probar que:

i) Si $p \equiv 1(4)$, entonces existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $I = \langle a + bi\rangle \cdot \langle a - bi\rangle$.

ii) Si $p \equiv 3(4)$, entonces I es un ideal primo.

Ejercicio 4. Mostrar que si $K = Q[\sqrt{10}]$, en $\mathcal{O}_K$ no hay unicidad de factorización.

Ejercicio 5. Sea a el ideal $a = \langle 2, 1 + \sqrt{-3}\rangle$ en el anillo $\mathcal{O} = \{a + b\sqrt{-3};\ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Probar que $a \neq \langle 2\rangle$, pero $a^2 = 2a$. Concluir que $\mathcal{O}$ no tiene factorización única en ideales. ¿Contradice esto el teorema de factorización única demostrado?