

Álgebra III - Práctica 6 - Ejercicios adicionales

Ejercicio 1. Sea $f = X^6 + X^4 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$.

- (a) Sea $T : \mathbb{F}_2[X]/(f(X)) \rightarrow \mathbb{F}_2[X]/(f(X))$ la transformación lineal definida por $T(g) = g^2$. Hallar una base del núcleo de $T - id$ y deducir que f es un producto de 3 factores irreducibles en $\mathbb{F}_2[X]$.
- (b) Tomar $h_1 \in \ker(T - id)$ no constante. Calcular $g_1 = \gcd(f, h_1)$ y $g_2 = \gcd(f, h_1 + 1)$ para obtener una factorización no trivial $f = g_1 g_2$.
- (c) Tomar $h_2 \in \ker(T - id)$ que no pertenezca a $\langle 1, h_1 \rangle$. Calcular $\gcd(g_i, h_2)$ y $\gcd(g_i, h_2 + 1)$, para $i = 1, 2$, y deducir una factorización de f como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{F}_2[X]$.

Ejercicio 2. Factorizar $f = X^5 + X^2 + 4X + 6$ como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{F}_7[X]$.