

# ÁLGEBRA III

## Práctica 2 – Segundo Cuatrimestre de 2011

### Extensiones de cuerpos, polinomios minimales, elementos algebraicos y trascendentes

**Ejercicio 1.** Sea  $E/K$  una extensión, y sea  $x \in E$  algebraico sobre  $K$ . Dada una subextensión  $F/K$  de  $E/K$ , probar que  $f(x, F)$  divide a  $f(x, K)$ . Dar ejemplos con  $f(x, F) = f(x, K)$  y con  $f(x, F) \neq f(x, K)$ .

**Ejercicio 2.** Calcular los siguientes polinomios minimales:

- |                                   |  |  |
|-----------------------------------|--|--|
| i) $f(\sqrt[4]{2}, \mathbb{Q})$   | ii) $f(\sqrt[4]{2}, \mathbb{Q}[\sqrt{2}])$ | iii) $f(\sqrt[4]{2}, \mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}])$ |
| iv) $f(\sqrt[4]{-1}, \mathbb{Q})$ | v) $f(\sqrt[4]{-1}, \mathbb{Q}[i])$        | vi) $f(w, \mathbb{R})$ con $w \in \mathbb{C}$  |

**Ejercicio 3.** Calcular:

- i)  $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, i] : \mathbb{Q}]$
- ii)  $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{7}] : \mathbb{Q}]$

**Ejercicio 4.**

- i) Calcular  $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] : \mathbb{Q}]$  y  $[\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}] : \mathbb{Q}]$ . Deducir que  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$ .
- ii) Hallar  $\alpha \in \mathbb{C}$  tal que  $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}]$ . Calcular  $f(\alpha, \mathbb{Q})$ .

**Ejercicio 5.** Probar que  $\mathbb{Q}[\sqrt{2 - \sqrt{3}}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2 + \sqrt{3}}]$ . Calcular  $[\mathbb{Q}[\sqrt{2 - \sqrt{3}}] : \mathbb{Q}]$ .

**Ejercicio 6.** Sea  $E/K$  una extensión. Probar que  $E/K$  es algebraica si y sólo si todo anillo  $A$ , con  $K \subseteq A \subseteq E$ , es un cuerpo.

**Ejercicio 7.** Sea  $K = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$  con la estructura de cuerpo del Ejercicio 11 de la Práctica 1.

- i) Calcular el polinomio minimal de cada uno de los elementos de  $K$  sobre su cuerpo primo.
- ii) Hallar todos los polinomios  $f \in \mathbb{Z}_3[X]$  irreducibles de grado 2 y probar que para cada uno de ellos se tiene que  $\mathbb{Z}_3[X]/\langle f \rangle \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ .

**Ejercicio 8.** Sea  $a \in \mathbb{Z}[i]$  irreducible y sea  $K$  el cuerpo primo de  $\mathbb{Z}[i]/\langle a \rangle$ . Calcular  $[\mathbb{Z}[i]/\langle a \rangle : K]$ .

**Ejercicio 9.** Sea  $F/K$  una extensión de cuerpos de grado impar. Probar que si  $F = K[u]$  entonces  $F = K[u^2]$ .

**Ejercicio 10.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(n : 6) = 1$ , y sea  $F/\mathbb{Q}$  una subextensión de  $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$  de grado  $n$ . Probar que  $[F[\sqrt[3]{2}, i] : F] = 6$ .

**Ejercicio 11.** Sean  $L/K$  y  $M/K$  dos subextensiones de grado finito de una extensión  $F/K$ . Probar que:

- i) Si  $\text{mcd}([L : K], [M : K]) = 1$ , entonces  $[L.M : K] = [L : K] \cdot [M : K]$ .
- ii) Si  $[L.M : K] = [L : K] \cdot [M : K]$  entonces  $L \cap M = K$ . ¿Vale la recíproca?

**Ejercicio 12.**

- i) Sea  $K$  un cuerpo de característica  $\neq 2$ . Caracterizar las extensiones cuadráticas (i.e. de grado 2) de  $K$ .
- ii) Sea  $f = X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}_2[X]$  y sea  $a$  una raíz de  $f$  en una clausura algebraica de  $\mathbb{Z}_2$ . Probar que no existe  $b \in \mathbb{Z}_2[a]$  tal que  $f(b, \mathbb{Z}_2) = X^2 + c$  para algún  $c \in \mathbb{Z}_2$ .

**Ejercicio 13.** Dado  $b \in \mathbb{Q}$ , sea  $a_b$  una raíz del polinomio  $X^2 + bX + b^2$ . Describir las posibles extensiones  $\mathbb{Q}[a_b]$  de  $\mathbb{Q}$  y determinar  $[\mathbb{Q}[a_b] : \mathbb{Q}]$ .

**Ejercicio 14.**

- i) Sea  $p \in \mathbb{N}$  primo. Calcular  $f(\xi_p, \mathbb{Q})$  y deducir  $[\mathbb{Q}[\xi_p] : \mathbb{Q}]$ .
- ii) Calcular  $f(\xi_6, \mathbb{Q})$ .
- iii) Probar que  $f(\xi_n, \mathbb{Q}) = 1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1}$  si y sólo si  $n$  es primo.

**Ejercicio 15.** Probar que  $f(\xi_5 + \xi_5^4, \mathbb{Q}) = X^2 + X - 1$ . Deducir que  $\mathbb{Q}[\xi_5]$  admite una subextensión cuadrática y caracterizarla.

**Ejercicio 16.** Sea  $p \in \mathbb{N}$  primo y sea  $a \notin \mathbb{Q}^p$ .

- i) Probar que  $f(\sqrt[p]{a}, \mathbb{Q}) = X^p - a$ .
- ii) Sea  $K \subseteq \mathbb{C}$  el mínimo cuerpo que contiene a todas las raíces de  $f(\sqrt[p]{a}, \mathbb{Q})$ . Caracterizar  $K$  y calcular  $[K : \mathbb{Q}]$  y  $[K : \mathbb{Q}[\sqrt[p]{a}]]$ .

**Ejercicio 17.** Se define  $\mathbb{Q}_{\text{alg}} = \{x \in \mathbb{C} : x \text{ es algebraico sobre } \mathbb{Q}\}$ . Probar que  $\mathbb{Q}_{\text{alg}}/\mathbb{Q}$  es una extensión algebraica que no es finita.

**Ejercicio 18.** Sea  $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una numeración de los primos positivos.

- i) (a) Probar que  $\forall a \in \mathbb{Q}[\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_n}]$  con  $a \notin \mathbb{Q}$  y  $a^2 \in \mathbb{Q}$ , existen  $b \in \mathbb{Q}$  y enteros  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  tales que  $a = b\sqrt{p_{i_1}} \dots \sqrt{p_{i_k}}$ .  
 (b) Calcular  $[\mathbb{Q}[\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_n}] : \mathbb{Q}]$ .  
 (c) Calcular la cantidad de subextensiones de grado 2 de  $\mathbb{Q}[\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_n}]/\mathbb{Q}$ .
- ii) Hallar  $[\mathbb{Q}[\sqrt{p_i}]_{i \in \mathbb{N}} : \mathbb{Q}]$ .
- iii) ¿Existen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$  tales que  $\mathbb{Q}[\sqrt{p_i}]_{i \in \mathbb{N}} = \mathbb{Q}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ ?
- iv) Sea  $K$  un cuerpo algebraicamente cerrado tal que  $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{C}$ . Deducir  $[K : \mathbb{Q}]$ .

**Ejercicio 19.** Sea  $E/K$  una extensión algebraica de grado infinito. Probar que existen subextensiones de  $E/K$  de grado finito arbitrariamente grande. ¿Qué pasa si  $E/K$  es puramente trascendente?

**Ejercicio 20.**

- i) Probar que un cuerpo algebraicamente cerrado es infinito.
- ii) Sea  $E/K$  una extensión algebraica. Calcular el cardinal de  $E$  en función del cardinal de  $K$ .
- iii) Deducir que para todo cardinal infinito  $a$  existe un cuerpo algebraicamente cerrado de cardinal  $a$ .

**Ejercicio 21.** Sea  $K$  un cuerpo.

- i) Sea  $t$  trascendente sobre  $K$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , calcular  $f(t, K(t^n))$ . Deducir  $[K(t) : K(t^n)]$ .
- ii) Sea  $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  una familia algebraicamente independiente sobre  $K$  y sean  $e_1, e_2, \dots, e_n$  números naturales. Calcular  $[K(t_1, \dots, t_n) : K(t_1^{e_1}, \dots, t_n^{e_n})]$ .

**Ejercicio 22.** Sea  $K$  un cuerpo y sea  $f \in K[X] - K$ . Probar que  $[K(X) : K(f)] = \text{gr}(f)$ .**Ejercicio 23.** Sea  $E/K$  una extensión de cuerpos y sean  $x, y \in E$ . Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

- i) Si  $x$  e  $y$  son trascendentes sobre  $K$  entonces  $x + y$  o  $x \cdot y$  es trascendente sobre  $K$ .
- ii) Si  $x$  es trascendente e  $y$  es algebraico sobre  $K$  entonces  $x + y$  es trascendente sobre  $K$ .
- iii) Si  $x$  es trascendente e  $y$  es algebraico sobre  $K$  entonces  $x \cdot y$  es trascendente sobre  $K$ .
- iv) Si  $x$  es trascendente sobre  $K$  e  $y$  es trascendente sobre  $K(x)$  entonces  $\{x, y\}$  es algebraicamente independiente sobre  $K$ .
- v) Si  $x$  e  $y$  son trascendentes sobre  $K$  entonces  $\{x, y\}$  es algebraicamente independiente sobre  $K$ .

**Ejercicio 24.**

- i) Sea  $d \in \mathbb{Z}$  libre de cuadrados. Probar que hay sólo dos morfismos de cuerpos  $f : \mathbb{Q}[\sqrt{d}] \rightarrow \mathbb{C}$  y que en cada caso  $f(\mathbb{Q}[\sqrt{d}]) \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$  (de hecho, vale la igualdad).
- ii) Sea  $d \in \mathbb{Z}$  libre de cubos.
  - (a) Probar que hay sólo tres morfismos de cuerpos  $f : \mathbb{Q}[\sqrt[3]{d}] \rightarrow \mathbb{C}$  pero, en general,  $f(\mathbb{Q}[\sqrt[3]{d}]) \not\subseteq \mathbb{Q}[\sqrt[3]{d}]$ .
  - (b) Considerar  $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{d}, \xi_3]$ . ¿Qué sucede en este caso?