Álgebra III - Resolubilidad de ecuaciones de grado 4

Ejercicio. Sea $f(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$.

(a) Mostrar que, efectuando la sustitución $X = Y - a/4$ en $f(X)$, se obtiene un polinomio de grado 4 sin término cúbico $g(Y) = Y^4 + pY^2 + qY + r$, donde

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{8}(-3a^2 + 8b) \\ q &= \frac{1}{8}(a^3 - 4ab + 8c) \\ r &= \frac{1}{256}(-3a^4 + 16a^2b - 64ac + 256d) \end{aligned}$$

(b) Sean α_1, α_2, α_3 y α_4 las raíces de g. Considerar los elementos

$$\begin{aligned} \theta_1 &= (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4) \\ \theta_2 &= (\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_4) \\ \theta_3 &= (\alpha_1 + \alpha_4)(\alpha_2 + \alpha_3) \end{aligned}$$

Probar que las funciones simétricas elementales en $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ quedan fijas por todos los elementos de S_4.

(c) Probar que $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ son las raíces del polinomio

$$h(X) = X^3 - 2pX^2 + (p^2 - 4r)X + q^2.$$

El polinomio h se llama la *resolvente cúbica* del polinomio g.

(d) Mostrar que

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= \sqrt{-\theta_1}, & \alpha_3 + \alpha_4 &= -\sqrt{-\theta_1} \\ \alpha_1 + \alpha_3 &= \sqrt{-\theta_2}, & \alpha_2 + \alpha_4 &= -\sqrt{-\theta_2} \\ \alpha_1 + \alpha_4 &= \sqrt{-\theta_3}, & \alpha_2 + \alpha_3 &= -\sqrt{-\theta_3} \end{aligned}$$

y deducir fórmulas para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ en términos de $\theta_1, \theta_2, \theta_3$.

De esta manera, el problema de calcular las raíces de un polinomio f de grado 4 se reduce a resolver la resolvente cúbica asociada h.