Álgebra II - Teoría de Grupos - Adicionales

1. Sea N un subgrupo normal de G. Supongamos que $|N| = 5$ y que $|G|$ es impar. Pruebe que $N \subseteq Z(G)$.
2. Sea G un grupo finito y no abeliano. Pruebe que si $\mathrm{Aut}(G)$ actúa en G por $\sigma \cdot g = \sigma(g)$, para $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$, $g \in G$, entonces hay por lo menos tres órbitas. Dé un ejemplo donde existan exactamente tres órbitas.
3. Sea $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $\mathbb{D}_{8n}$ y $\mathbb{D}_{4n} \times \mathbb{Z}_2$ no son isomorfos.
4. Pruebe que si $|G| = p^3q$ y G no tiene subgrupos de Sylow normales entonces $G \simeq \mathbb{S}_4$.
5. Pruebe que todo subgrupo normal de orden 2 es central.
6. Sea p un número primo y sea G un grupo de orden p^4 tal que $|Z(G)| = p^2$. Calcule el número de clases de conjugación de G.
7. Sea G un grupo simple y finito, y sea p un número primo tal que p divide a $|G|$. Si $n_p(G) = n$ para $n > 1$ entonces G es isomorfo a un subgrupo de $\mathbb{A}_n$.
8. Sean p y q dos primos y sea G un grupo de orden p^2q. Pruebe que G no es simple.