Álgebra 1

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales – Universidad de Buenos Aires
Segundo Cuatrimestre 2011

Práctica 7 - Polinomios

1. Calcular el coeficiente de X^{20} de f en los casos

i) $f = (X-3)^{133}$
ii) $f = (X-1)^4(X+5)^{19} + X^{33} - 5X^{20} + 7$
iii) $f = X^{10}(X^5+4)^7$

2. Calcular el grado y el coeficiente principal de f en los casos

i) $f = (4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}$
ii) $f = (-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7$
iii) $f = (-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}$

3. Hallar, cuando existan, todos los $f \in \mathbb{C}[X]$ tales que

i) $f^2 = Xf + X + 1$
ii) $f^2 - Xf = -X^2 + 1$
iii) $(X+1)f^2 = X^3 + Xf$
iv) $f \neq 0$ y $f^3 = \operatorname{gr}(f).X^2 f$

4. Hallar el cociente y el resto de la división de f por g en los casos

i) $f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4, \quad g = X^2 + 2$
ii) $f = 8X^4 + 6X^3 - 2X^2 + 14X - 4, \quad g = 2X^3 + 1$
iii) $f = 8X^4 + 6X^3 - 2X^2 + 14X - 4, \quad g = 2X + 1$
iv) $f = 6X^5 + 3X^2 - 9X + 1, \quad g = 3X + 2$
v) $f = X^9 - 3X^7 + X^6 - 2X^5 + 3X^3 - X^2 + 3, \quad g = X^5 + 4X - 1$

5. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que

i) $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sea divisible por $X^2 + aX + 1$
ii) $X^4 - aX^3 + 2X^2 + X + 1$ sea divisible por $X^2 + X + 1$
iii) el resto de la división de $X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$ sea $-8X + 4$

6. Sea $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Dado $h \in \mathbb{K}[X]$, se define la relación $\equiv \pmod{h}$ en $\mathbb{K}[X]$ como

$$f \equiv g \pmod{h} \iff h \mid f - g.$$

i) Probar que $\equiv \pmod{h}$ es una relación de equivalencia
ii) Probar que $f_1 \equiv g_1 \pmod{h}$ y $f_2 \equiv g_2 \pmod{h}$ implica
$f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2 \pmod{h}$ y $f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2 \pmod{h}$
iii) Probar que $f \equiv g \pmod{h}$ implica $f^n \equiv g^n \pmod{h}$ para todo $n \in \mathbb{N}$
iv) Probar que $r = r_h(f) \;\Leftrightarrow\; f \equiv r \pmod{h}$ y $r = 0$ ó $\operatorname{gr}(r) < \operatorname{gr}(h)$

7. Hallar el resto de la división de f por h en los casos

i) $f = X^{353} - X - 1, \quad h = X^{31} - 2$
ii) $f = X^{45} + X^{28} - X^{13} + 3, \quad h = X^{17} + 5$
iii) $f = X^{1000} - X^{40} + 11X^{20} + 12X^2 - 2, \quad h = X^6 + 1$
iv) $f = X^{200} - 3X^{101} + 2, \quad h = X^{100} - X + 1$

8. Sea $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y sea $a \in \mathbb{K}$. Probar que

i) $X - a \mid X^n - a^n$
ii) si n es impar entonces $X + a \mid X^n + a^n$
iii) si n par entonces $X + a \mid X^n - a^n$

calculando los cocientes en cada caso

9. Calcular el máximo común divisor entre f y g y escribirlo como combinación lineal de f y g siendo

i) $f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2, \quad g = X^4 - X^3 - X^2 + 1$
ii) $f = X^6 + X^4 + X^2 + 1, \quad g = X^3 + X$
iii) $f = X^5 + X^4 - X^3 + 2X - 3, \quad g = X^4 + 2X + 1$

10. i) Sea $f \in \mathbb{Z}[X]$ y sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N}$. Probar que si $a \equiv b \ (m)$ entonces $f(a) \equiv f(b) \ (m)$

ii) Probar que no existe $f \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $f(3) = 4$ y $f(-2) = 7$

11. Hallar todos los $f \in \mathbb{Z}[X]$ tales que

i) f es mónico de grado 3 y $f(\sqrt{2}) = 5$
ii) f es mónico de grado 3 y $f(1) = -f(-1)$

12. Hallar todos los $f \in \mathbb{Q}[X]$ y luego en $\mathbb{Z}[X]$ de grado 3 y 4 cuyas únicas raíces complejas sean 1, $-\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$

13. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1) = -2$, $f(2) = 1$ y $f(-1) = 0$. Hallar el resto de la división de f por $X^3 - 2X^2 - X + 2$

14. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Hallar el resto de la división de $X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1$ por $X^3 - X$

i) usando congruencias
ii) evaluando en puntos convenientes

15. Hallar todas las raíces complejas de $X^4 + 3X - 2$ sabiendo que tiene una raíz común con $X^4 + 3X^3 - 3X + 1$

16. i) Hallar todas las raíces racionales de

(a) $2X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X$
(b) $X^5 - \frac{1}{2}X^4 - 2X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{7}{2}X - 3$
(c) $3X^4 + 8X^3 + 6X^2 + 3X - 2$

ii) Probar que $X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 2$ no tiene raíces racionales

17. i) Hallar todas las raíces complejas de $f = X^5 - 4X^4 - X^3 + 9X^2 - 6X + 1$ sabiendo que $2 - \sqrt{3}$ es raíz de f

ii) Hallar $f \in \mathbb{Q}[X]$ mónico de grado mínimo que tenga a $1+2\sqrt{5}$ y a $3-\sqrt{2}$ como raíces

iii) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio de grado 5. Probar que si $\sqrt{2}$ y $1+\sqrt{3}$ son raíces de f entonces f tiene una raíz racional

iv) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1+\sqrt{2}) = 3$, $f(2-\sqrt{3}) = 3$ y $f(1+\sqrt{5}) = 3$. Calcular el resto de la división de f por $(X^2-2X-1)(X^2-4X+1)(X^2-2X-4)$

18. Hallar $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo tal que

i) $f(1) = 3$, $f(0) = \frac{1}{4}$, $f(\frac{1}{2}) = 3$ y $f(-1) = 1$

ii) $f(2) = 0$, $f(-3) = \frac{1}{2}$, $f(3) = -1$ y $f(-2) = 1$

19. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definida por

$$f_1 = X^3 + 2X - 1, \qquad f_{n+1} = Xf_n^2 + X^2 f_n' \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $\operatorname{gr}(f_n) = 2^{n+1} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$

20. Determinar la multiplicidad de a como raíz de f en los casos

i) $f = X^5 - 2X^3 + X, \quad a = 1$

ii) $f = 4X^4 + 5X^2 - 7X + 2, \quad a = \frac{1}{2}$

iii) $f = X^6 - 3X^4 + 4, \quad a = i$

iv) $f = (X-2)^2(X^2-4) + (X-2)^3(X-1), \quad a = 2$

21. Sea $n \in \mathbb{N}$. Hallar todos los $f \in \mathbb{C}[X]$ tales que $(X-1)^{n+1} f' = f^2$

22. i) Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$ tiene todas sus raíces simples

ii) Determinar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $f = X^{2n+1} - (2n+1)X + a$ tiene al menos una raíz múltiple

23. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $X^6 - 2X^5 + (1+a)X^4 - 2aX^3 + (1+a)X^2 - 2X + 1$ es divisible por $(X-1)^3$

24. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que 1 sea raíz doble de $X^4 - aX^3 - 3X^2 + (2+3a)X - 2a$

25. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que

i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$ tiene todas sus raíces simples

ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ tiene todas sus raíces simples

26. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definida por

$$f_1 = X^4 + 2X^2 + 1, \qquad f_{n+1} = (X-i)(f_n + f_n') \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que i es raíz doble de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$

27. Sea $f \in \mathbb{C}[X]$. Probar que $a \in \mathbb{C}$ es raíz múltiple de f si y sólo si es raíz de $(f : f')$. Deducir que si $f \in \mathbb{Q}[X]$ es irreducible entonces tiene todas sus raíces simples

28. Factorizar el polinomio f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ en los casos

i) $f = X^4 - X^3 + X^2 - 3X - 6$
ii) $f = X^4 - 6X^2 + 1$
iii) $f = X^6 - 2$
iv) $f = X^5 - X^3 + 17X^2 - 16X + 15$, sabiendo que $1 + 2\,i$ es raíz de f
v) $f = X^5 + 2X^4 + X^3 + X^2 - 1$, sabiendo que $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ es raíz de f

29. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $f = X^4 - (a+4)X^3 + (4a+5)X^2 - (5a+2)X + 2a$ tenga a a como raíz doble. Para cada valor de a hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$

30. Factorizar el polinomio $f = X^6 + X^5 + 5X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 4X + 4$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ sabiendo que $\sqrt{2}\,i$ es raíz múltiple de f

31. Factorizar el polinomio $X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 10X - 10$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ sabiendo que tiene una raíz imaginaria pura

32. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales al menos una de las raíces de

$$f = X^6 + X^5 - 3X^4 + 2X^3 + X^2 - 3X + a$$

sea una raíz sexta primitiva de la unidad. Para cada valor de a hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$

33. Sean a, b y c las raíces complejas de $2X^3 - 3X^2 + 4X + 1$.

i) Hallar

(a) $a+b+c$	(d) $a^2+b^2+c^2$	(g) $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2$
(b) $ab+ac+bc$	(e) $a^3+b^3+c^3$	(h) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$
(c) abc	(f) $a^4+b^4+c^4$	(i) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

ii) Encontrar un polinomio de grado 3 cuyas raíces sean $a+b$, $a+c$ y $b+c$

34. Factorizar el polinomio $X^4 + X^3 - 3X^2 + 4X - 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ sabiendo que la suma de tres de sus raíces es $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$

35. Hallar todas las raíces complejas del polinomio $X^6 - X^5 - 7X^4 - 7X^3 - 7X^2 - 8X - 6$ sabiendo que tiene dos raíces cuya suma es 2 y cuyo producto es -6

36. Sea $n \in \mathbb{N}$. Usando que $w \in G_n$ si y solo si w es raíz del polinomio $X^n - 1$, dar una nueva demostración de que la suma de las raíces n-ésimas de 1 distintas de 1 es -1. Calcular $\prod_{w \in G_n} w$.

37. Sea f un polinomio de grado n con raíces distintas $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Probar que el coeficiente de grado $n-1$ de f es 0 si y solo si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$. ¿Qué se puede decir si hay raíces repetidas?

38. Sea $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$. Si todas las raíces de f son enteros pares, probar que $2^j \mid a_{n-j}\ \forall j = 0, \dots, n$.