Álgebra 1

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales – Universidad de Buenos Aires
Segundo Cuatrimestre 2011

Práctica 6 - Complejos

1. Dados $z = 1+3\,i$ y $w = 4+2\,i$, representar en el plano los siguientes números complejos

i) z ii) w iii) $z+w$ iv) $z-w$ v) $-z$ vi) $\overline{z}$ vii) $2\,z$ viii) $\frac{1}{2}\,w$ ix) $|z|$ x) $|w-z|$

2. Hallar $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $\overline{z}$, $|z|$, z^{-1}, $\mathrm{Re}(z^{-1})$, $\mathrm{Im}(z^{-1})$, $\mathrm{Re}(-i\,z)$ e $\mathrm{Im}(i\,z)$ en cada uno de los casos siguientes

i) $z = (2+i)(1+3\,i)$

ii) $z = 5\,i\,(1+i)^4$

iii) $z = (\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i)^2(\overline{1-3\,i})$

iv) $z = i^{17} + \frac{1}{2}\,i\,(1-i)^3$

v) $z = (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i)^{179}$

vi) $(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i)^{-1}\big(1+(2-i)^2\big)$

3. Graficar en el plano complejo

i) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, 3\ \mathrm{Re}(z) - 1 = 2\ \mathrm{Im}(z)\}$

ii) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, -1 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$ y $|z| \leq 2\}$

iii) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, 2 \leq |z-1+i| \leq 3\}$

iv) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, z\ \mathrm{Im}(z)\,(1-i) = |z|^2\}$

v) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z-2| = |z-1-i|\}$

4. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

i) $z \neq 0$ y $z = \overline{z}^{\,-1}$

ii) $\mathrm{Re}(z^2) = 0$

iii) $z \neq 0$ y $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$

iv) $|z|^2 = (z+\overline{z})\ \mathrm{Im}(z)$

v) $z^2 + |z^2| = i\,\overline{z}$

vi) $|z-\overline{z}| = \mathrm{Re}(z)$

vii) $i\,(z^2+4) = z\ \mathrm{Im}(z)$

viii) $z \neq 0$ y $z - 1 = z^{-1}$

5. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

i) $z^2 - 2z + 10 = 0$

ii) $z^2 = 3+4\,i$

iii) $z^2 + (1+2\,i)\,z + 2\,i = 0$

iv) $z^2 + (3+2\,i)\,z + 5 + i = 0$

6. Calcular los módulos y los argumentos de los siguientes números complejos

i) $3+\sqrt{3}\,i$

ii) $(2+2\,i)(\sqrt{3}-i)$

iii) $(-1-i)^{-1}$

iv) $(-1+\sqrt{3}\,i)^5$

v) $-\cos\frac{8\pi}{3} + i\ \mathrm{sen}\,\frac{8\pi}{3}$

vi) $\cos\frac{4\pi}{7} + i\ \mathrm{sen}\,\frac{-4\pi}{7}$

vii) $\cos\frac{11\pi}{5} - i\ \mathrm{sen}\,\frac{19\pi}{5}$

viii) $\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{4} + i\ \cos\frac{3\pi}{4}$

ix) $\cos\frac{55\pi}{3} - \mathrm{sen}\,\frac{56\pi}{3}$

7. Graficar en el plano complejo

i) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} \,/\, |z| \geq 2$ y $\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{2\pi}{3}\}$

ii) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} \,/\, \arg(-i\,z) > \frac{\pi}{4}\}$

iii) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} \,/\, |z| < 3 \text{ y } \arg(z^4) \leq \pi\}$

8. i) Calcular $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{1-i}\right)^{17}$

ii) Calcular $(-1+\sqrt{3}\,i)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$

iii) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(\sqrt{3}-i)^n = 2^{n-1}(-1+\sqrt{3}\,i)$

9. Calcular las raíces n-ésimas de z en los casos

i) $n = 6$, $z = 8$

ii) $n = 4$, $z = -3$

iii) $n = 7$, $z = -1 + i$

iv) $n = 11$, $z = 2\,i\,(\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i)^{-1}$

10. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que

i) $z^4 = i\,\overline{z}^3$

ii) $z^6 = (2-2\,i)^{10}$

iii) $z^8 = \overline{z}^8$

iv) $(z-1)^4 = (\overline{z}+i)^4$

v) $z^{12} + z^6 + 1 = 0$

vi) $(z+1)^4 = (z+i)^2$

11. Determinar las raíces n-ésimas primitivas de la unidad para $n = 2, 3, 4, 5, 6$ y 12.

12. Probar que $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad si y solo si $\overline{w}$ lo es.

13. Sea w una raíz novena primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $w^{5n} = w^3$

14. Probar que el producto de todas las raíces n-ésimas de la unidad es $(-1)^{n-1}$

15. Calcular la suma de las raíces n-ésimas primitivas de la unidad para $n = 2, 3, 4, 5, 8, 10, 15$.

16. Dado un número primo p, probar que:

i) la suma de las raíces p-ésimas primitivas de la unidad es -1.

ii) la suma de las raíces p^2-ésimas primitivas de la unidad es 0.

iii) Si q es un número primo distinto de p, entonces la suma de las raíces pq-ésimas primitivas de la unidad es 1.

iv) *¿Cuánto da la suma de las raíces n-ésimas primitivas de la unidad si n es un producto de primos distintos?

17. i) Calcular $w + \overline{w} + (w+w^2)^2 - w^{38}(1-w^2)$ para cada $w \in G_7$

ii) Calcular $w^{73} + \overline{w}.w^9 + 8$ para cada $w \in G_3$

iii) Calcular $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4}$ para cada $w \in G_{10}$

iv) Calcular $w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w^{-3}}$ para cada $w \in G_5$

18. Probar que si $w \in G_7$ entonces $\mathrm{Re}((w^{31}+1)(w^{18}-1)) = 0$

19. Sea w una raíz quinceava primitiva de la unidad.

i) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} w^{5i} = 0$

ii) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $\displaystyle\sum_{i=2}^{n-1} w^{3i} = 0$

20. Sea w una raíz cúbica primitiva de la unidad y sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números complejos definida por

$$z_1 = 1 + w, \qquad z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que z_n es una raíz sexta primitiva de la unidad para todo $n \in \mathbb{N}$