Álgebra 1

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales – Universidad de Buenos Aires
Segundo Cuatrimestre 2011

Práctica 3 - Combinatoria

1. Si hay 3 rutas distintas para ir de Buenos Aires a Rosario, 4 rutas distintas para ir de Rosario a Santa Fe, y 2 para ir de Santa Fe a Reconquista ¿cuántos formas distintas hay para ir de Buenos Aires a Reconquista pasando por las dos ciudades intermedias?

2. i) Se lanza una moneda 10 veces. ¿Cuántos resultados posibles (es decir 10-uplas de resultados) hay?

ii) Un bolillero contiene 10 bolillas numeradas de 1 a 10. Si primero se extrae una bolilla y luego se lanza una moneda tantas veces como indique la bolilla. ¿Cuántos resultados posibles hay?

3. ¿Cuántos números de cinco cifras se pueden formar utilizando los dígitos 1, 2, 3, 4 , 5 , 6 y 7 con la condición de que

i) empiecen con 1?

ii) tengan todas las cifras iguales?

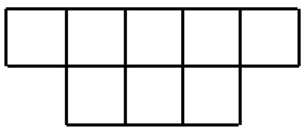
iii) sean capicúas?

iv) sean pares y capicúas?

v) sean estrictamente mayores que 29999?

vi) sean estrictamente mayores que 32992?

4. ¿De cuántas maneras pueden pintarse los ocho cuadraditos del diagrama



si se dispone de once colores y se impone la condición de que si dos cuadraditos tienen un lado en común entonces deben estar pintados de distinto color?

5. ¿De cuántas maneras pueden ubicarse 19 bolillas numeradas en tres cajas distintas?. ¿De cuántas, si la primera caja no puede quedar vacía? ¿De cuántas, si no puede quedar ninguna caja vacía?

6. ¿Cuántas funciones $f : A \to B$ se pueden determinar con $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$? ¿Si además se pide $f(1) \in \{2, 4, 6\}$?

7. ¿Cuántos números de cinco cifras *distintas* se pueden formar utilizando los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5? ¿Y con los dígitos 0, 1, 2, 3 y 4?

8. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 8 personas alrededor de una mesa circular? (sólo importa el orden relativo de las personas)

9. ¿Cuántas palabras (anagramas) se pueden formar

i) permutando las letras de MANTEL?

ii) permutando las letras de MAQUINARIA?

10. ¿Cuántos números mayores que 10000000 se pueden obtener permutando los dígitos de 11122000? ¿Cuántos mayores que 100000?

11. ¿Cuántas funciones biyectivas $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ se pueden definir si se pide que $f(\{1, 2, 3\}) = \{4, 5, 6\}$?

12. ¿Cuántos números de cinco cifras *distintas* se pueden formar utilizando los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7? ¿Y con la condición de que el número obtenido sea capicúa? ¿Y con la condición de que el número obtenido sea par y capicúa?

13. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 129 personas en un teatro que tiene 152 asientos numerados?

14. ¿Cuántas palabras de seis letras se pueden formar con las letras de REPELER?

15. ¿Cuántas funciones inyectivas $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ se pueden definir si se pide además que

i) $f(1)$ sea par?

ii) $f(1)$ y $f(2)$ sean pares?

16. ¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos tiene el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ si se pide que 1 pertenezca al subconjunto? ¿Y si se pide que 1 ó 2 pertenezcan pero no simultaneamente los dos?

17. De una caja que contiene 122 bolillas numeradas de 1 a 122 se extraen cinco bolillas. ¿Cuántos resultados posibles hay si

i) las bolillas se extraen una a la vez, sin reposición? (e importa el orden de extracción)

ii) las bolillas se extraen todas juntas?

18. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 22 bolitas indistinguibles en 59 cajas numeradas con la condición de que cada caja debe contener a lo sumo una bolita?

19. i) Probar que $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 4^n$ y deducir que $\binom{2n}{n} < 4^n$ (cf. Ejercicio 9 (ii) Práct. 2)

ii) Calcular $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$

iii) Probar que $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\, 2^{n-1}$ (Sug: $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$)

iv) Probar que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ (Sug: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$)

20. ¿Cuántos números de cinco cifras se pueden formar utilizando los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 con la condición de que

i) exactamente tres de las cifras sean iguales a 6?

ii) por lo menos tres de las cifras sean iguales a 6? ¿da $\binom{5}{3}7^2$ ó $\binom{5}{3}6^2 + \binom{5}{4}6 + 1$?

iii) la cantidad de cifras impares sea exactamente 2?

iv) la cantidad de cifras impares sea por lo menos 2?

21. Dadas dos rectas paralelas en el plano, se marcan n puntos distintos sobre una y m puntos distintos sobre la otra, ¿cuántos triángulos se pueden formar con vértices en esos puntos?

22. ¿Cuantas palabras se pueden formar permutando las letras de CUADROS

i) con la condición de que todas las vocales estén juntas?

ii) con la condición de que las consonantes mantengan el orden relativo original?

iii) con la condición de que nunca haya dos (o más) consonantes juntas?

23. ¿Cuántas de las permutaciones de 111233557 satisfacen que todos los 1 están a la izquierda del 2 y todos los 5 a su derecha (como por ejemplo 113127535)?

24. ¿Cuántas funciones biyectivas $f : \{1,2,3,4,5,6,7\} \to \{1,2,3,4,5,6,7\}$ se pueden definir si se pide que $f(\{1,2,3\}) \subseteq \{3,4,5,6,7\}$?

25. ¿Cuántas funciones suryectivas $f : \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \to \{1,2,3,4,5,6,7\}$ se pueden definir si se pide además que el 1 tenga exactamente 3 antecedentes y el 2 exactamente 2 antecedentes ?

26. ¿Cuántas funciones $f : A \to B$ se pueden determinar con $A = \{1,2,3,4,5\}$ y $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ si se tiene que cumplir que

i) $i < j$ en A implica que $f(i) < f(j)$ en B?

ii) $f(1) \in \{2,4,6\}$ e $i < j$ en A implica que $f(i) < f(j)$ en B simultáneamente?

27. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 22 bolitas indistinguibles en 9 cajas numeradas con la condición de que

i) ninguna caja debe quedar vacía?

ii) la quinta caja debe quedar vacía?

iii) la tercera caja debe quedar vacía y la sexta debe contener exactamente 3 bolitas?

iv) queden exactamente dos cajas vacías?

v) queden a lo sumo dos cajas vacías?

vi) la primera caja debe contener exactamente 4 bolitas, la tercera debe contener por lo menos 5 bolitas y la última caja debe contener a lo sumo una bolita?

28. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 9 bolitas rojas y 95 bolitas negras en 15 cajas numeradas con la condición de que cada caja debe contener a lo sumo una bolita roja y por lo menos tres bolitas negras?

29. Se extraen 23 bolitas de una caja que contiene 100 bolitas blancas, 100 bolitas azules, 100 bolitas negras y 100 bolitas rojas. ¿Cuántos resultados posibles hay?

30. i) ¿De cuántas maneras se puede descomponer un número natural n como suma de k números enteros mayores o iguales que cero? Por ejemplo, si $k = 3$ y $n = 4$ se tienen las siguientes 15 descomposiciones

$0+0+4$	$0+3+1$	$1+1+2$	$2+0+2$	$3+0+1$
$0+1+3$	$0+4+0$	$1+2+1$	$2+1+1$	$3+1+0$
$0+2+2$	$1+0+3$	$1+3+0$	$2+2+0$	$4+0+0$

ii) ¿De cuántas maneras se puede descomponer un número natural n como suma de k números naturales? Por ejemplo, si $k = 3$ y $n = 5$ se tienen las siguientes 6 descomposiciones $1+1+3$ $1+2+2$ $1+3+1$ $2+1+2$ $2+2+1$ $3+1+1$

31. i) ¿De cuántas maneras se puede descomponer a 86 como suma de 7 números naturales pares?

ii) ¿De cuántas maneras se puede descomponer a 100 como suma de 8 números naturales impares?

32. ¿Cuántos números de 4 dígitos hay tales que la suma de los dígitos da 9? ¿Y 10?

33. En el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de partes de $\mathbb{N}$ se define la relación $\Re$: para $A,\ B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$(A, B) \in \Re \iff A \cup B = \mathbb{N} \quad \text{y} \quad 3 \notin A \cap B.$$

Contar la cantidad de subconjuntos de $\mathbb{N}$ que están relacionados con el $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

34. Sea A un conjunto con n elementos.

i) ¿Cuántas relaciones pueden definirse en A?
ii) ¿Cuántas relaciones que sean reflexivas pueden definirse en A?
iii) ¿Cuántas relaciones que sean reflexivas y simétricas pueden definirse en A?
iv) ¿Cuántas relaciones que sean antisimétricas pueden definirse en A?

35. Sea A un conjunto con $3n$ elementos. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en A que cumplan la condición de que para todo $a \in A$ la clase de equivalencia de a tenga n elementos?

36. Calcular la probabilidad de que al extraer una carta de un mazo de 40 cartas españolas la carta extraída

i) sea el as de copas,
ii) sea un as,
iii) sea sea de copas,
iv) sea un as o sea de copas.

37. Se extraen tres cartas de un mazo de 40 cartas espñolas. Calcular la probabilidad de que

i) salgan más pares que impares,
ii) todas sean caballos,
iii) todas sean de copas,
iv) ninguna sea de copas,
v) al menos una sea un as.

38. Calcular la probabilidad de que al arrojar dos dados, uno rojo y uno verde,

i) en el dado rojo salga un número menor que 4
ii) en ambos dados salga el mismo número
iii) en el dado rojo salga un número menor que en el dado verde

39. Se arroja una moneda 7 veces. Calcular la probabilidad de que

i) salgan exactamente 5 caras,
ii) salgan por lo menos 5 caras,
iii) salga una cantidad impar de caras.

40. Se elige al azar una permutación del número 1234567. Calcular la probabilidad de que el número elegido sea par.

41. De un bolillero que contiene 100 bolillas numeradas de 1 a 100 se extraen, sin reposición, primero una bolilla, luego otra, etc, hasta que el bolillero queda vacío. Calcular la probabilidad de que la bolilla número 3 salga antes que la número 45.

42. De una caja que contiene 100 bolillas numeradas de 1 a 100 se extraen cinco bolillas, una a una y sin reposición. Calcular la probabilidad de que

i) la suma de los números de las bolillas extraídas sea 15,
ii) todos los números de las bolillas extraídas sean pares,
iii) la suma de los números de las dos primeras bolillas extraídas sea 8.