

Álgebra 1

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales – Universidad de Buenos Aires
Segundo Cuatrimestre 2011

Práctica 2 - Naturales

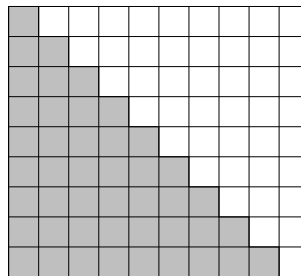
1. Reescribir cada una de las siguientes sumas usando el símbolo de sumatoria

- i) $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100$ iv) $1 + 9 + 25 + 49 + \dots + 441$
ii) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 1024$ v) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1)$
iii) $1 + (-4) + 9 + (-16) + 25 + \dots + (-144)$ vi) $n + 2n + 3n + \dots + n^2$

2. Escribir los dos primeros y los dos últimos términos de las sumatorias siguientes

- i) $\sum_{i=6}^n 2(i - 5)$ iii) $\sum_{i=1}^n \frac{n + i}{2i}$
ii) $\sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i(i + 1)}$ iv) $\sum_{i=1}^{n^2} \frac{n}{i}$

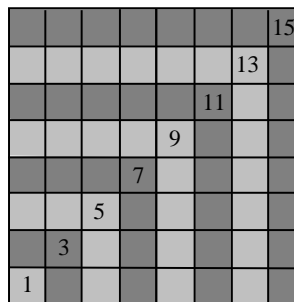
3. i) Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n + 1)}{2}$ contando de dos maneras la cantidad de cuadraditos sombreados del diagrama



ii) Deducir que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$

4. Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$

i) contando de dos maneras la cantidad total de cuadraditos del diagrama



- ii) usando el ejercicio 3.
iii) usando el principio de inducción

5. Calcular

i)
$$\sum_{i=1}^n (4i + 1)$$

ii)
$$\sum_{i=6}^n 2(i - 5)$$

iii)
$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} \quad (\text{Sugerencia: } \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}).$$

iv)
$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} \quad (\text{Sugerencia: calcular } \frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}).$$

6. Probar que las siguientes igualdades son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

i)
$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

iv)
$$\sum_{i=1}^n (2i+1) 3^{i-1} = n 3^n$$

ii)
$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} i^2 = \frac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2}$$

v)
$$\sum_{i=1}^n \frac{i 2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$$

iii)
$$\sum_{i=0}^n \frac{-1}{4i^2 - 1} = \frac{n+1}{2n+1}$$

vi)
$$\prod_{i=1}^n \frac{n+i}{2i-3} = 2^n(1-2n)$$

7. Probar que las siguientes desigualdades son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

i) $n < 2^n$

ii) $3^n + 5^n \geq 2^{n+2}$

iii) $3^n \geq n^3$

iv)
$$\sum_{i=1}^n \frac{n+i}{i+1} \leq 1 + n(n-1)$$

v)
$$\sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} \leq n$$

vi)
$$\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2i-1} > \frac{n+3}{4}$$

8. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a^n - b^n = (a-b) \sum_{i=1}^n a^{i-1} b^{n-i}$.9. Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, vale

i) $n! \geq \frac{3^{n-1}}{2}$

ii) $\binom{2n}{n} \leq 4^n$

iii) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

10. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \geq -1$. Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1+na$.
¿En qué paso de la demostración se usa que $a \geq -1$?

11. Probar que

- i) $n! \geq 3^{n-1}, \forall n \geq 5$
- ii) $3^n - 2^n > n^3, \forall n \geq 4$
- iii) $\sum_{i=1}^n \frac{3^i}{i!} < 6n - 5, \forall n \geq 3$
- iv) $\binom{2n}{n} > n 2^n, \forall n \geq 4$

12. Probar que para todo $n \geq 3$ valen

- i) la cantidad de diagonales de un polígono de n lados es $\frac{n(n-3)}{2}$
- ii) la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $\pi(n-2)$

13. i) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = 3a_n - 2^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = 2^n + 3^n$.

ii) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2n a_n + 2^{n+1} n! \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = 2^n n!$.

iii) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = a_n + n(3n+1) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = n^2(n-1)$.

iv) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 4a_n - 2 \frac{(2n)!}{(n+1)! n!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = \binom{2n}{n}$.

14. Para cada una de las siguientes sucesiones definidas por recursión, hallar una fórmula para el término general y demostrar su validez

- i) $a_1 = 1, a_{n+1} = (1 + \sqrt{a_n})^2 \quad (n \in \mathbb{N})$
- iii) $a_1 = 1, a_{n+1} = n a_n \quad (n \in \mathbb{N})$
- ii) $a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n + 3^n \quad (n \in \mathbb{N})$
- iv) $a_1 = 2, a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$

15. i) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Probar que $\sum_{i=1}^n (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$ **ii) Hallar una fórmula para el término general de la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por**

- (a) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + n^3 \quad (n \in \mathbb{N})$.
- (b) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + (-1)^{n+1} n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$.
- (c) $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + (2n+1)3^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$. Sugerencia: usar i) y el ejercicio 6.

iii) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 3n^2 + 3n + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = n^3$ y, usando esto, calcular $\sum_{i=1}^n i^2$.

Sugerencia:
$$\sum_{i=1}^n (a_{i+1} - a_i) = \sum_{i=1}^n (3i^2 + 3i + 1)$$

iv) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + n \cdot n! \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = n!$ y, usando esto, calcular $\sum_{i=1}^n i \cdot i!$

16. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

i) Probar que $a_n \leq \frac{1}{2n} \binom{2n}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

ii) Probar que $a_n > \frac{1}{3^{n-1}} \binom{2n}{n}$ para todo $n \geq 3$

17. Para cada una de las siguientes sucesiones definidas por recursión, conjeturar una fórmula para el término general y probar su validez

i) $a_1 = 1, a_2 = 2, \quad a_{n+2} = n a_{n+1} + 2(n+1)a_n \quad (n \in \mathbb{N})$

ii) $a_1 = 1, a_2 = 4, \quad a_{n+2} = 4\sqrt{a_{n+1}} + a_n \quad (n \in \mathbb{N})$

iii) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^n i a_i \quad (n \in \mathbb{N})$

iv) $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{i=1}^n a_i \right) \quad (n \in \mathbb{N})$

18. i) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 5a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n < 1 + 3^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2n+1}{n+2} a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n > n + \frac{1}{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$.