

ANÁLISIS NUMÉRICO — Práctica 1

Segundo Cuatrimestre de 2010

1. Se utiliza el esquema en diferencias:

$$u_j^{n+1} = ru_{j-1}^n + (1 - 2r)u_j^n + ru_{j+1}^n \quad \text{donde } r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = k/h^2$$

para aproximar la ecuación $U_t = U_{xx}$, donde se supone que U tiene derivadas continuas y acotadas hasta el tercer orden en t , y hasta de orden seis en x . Probar que el error de discretización $e_j^n = U(x_j, t_n) - u_j^n$ es solución de la ecuación en diferencias:

$$e_j^{n+1} = re_{j-1}^n + (1 - 2r)e_j^n + re_{j+1}^n + kT(x_j, t_n)$$

donde

$$T(x_j, t_n) = \frac{h^2}{12} (6rU_{tt} - U_{xxxx})_{j,n} + \frac{k^2}{6} U_{ttt}(x_j, t_n + \theta_n k) - \frac{h^4}{360} U_{xxxxx}(x_j + \theta_j h, t_n)$$

con $-1 < \theta_j < 1$, $0 < \theta_n < 1$.

- (a) Pruebe que el error de truncado es de orden h^2 , salvo para $r = 1/6$ en que es de orden h^4 .
- (b) Si el valor máximo de $|T|$ es M y

$$E_n = \max_{0 \leq j \leq N} \{|e_j^n|\}$$

probar que si $0 < r \leq 1/2$ entonces $E_n \leq tM$.

En particular, observe que si además $t \leq T_f$ y U_{tt} y U_{xxxx} están acotadas luego

$$E_n \leq CT_f k \tag{1}$$

para una constant C independiente de h y k .

2. Escribir un programa en Matlab para integrar con el método explícito del Ej. 1, la ecuación del calor $u_t = u_{xx} + f(x, t)$ en el intervalo $[0, 1]$ para un dato inicial arbitrario y con condiciones de borde (de tipo Dirichlet) homogéneas.
3. Utilizar el programa del ejercicio previo con $f(x, t) \equiv 0$ para el caso

$$u_0(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1 - x & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Considere $h = 0.05$, $k = 0.0012$, y $k = 0.0013$. Avance por lo menos 50 pasos, ¿qué sucede? Verifique el valor de $r = k/h^2$ en cada caso.

4. Repetir el ejercicio anterior con $k = 0.0013$ para

- (a) $u_t = u_{xx} \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad u(x, 0) = x(1 - x)$,

$$(b) \quad u_t = u_{xx} \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad u(x, 0) = \sin(\pi x).$$

Observe que ambos casos resultan estables en los primeros 50 pasos. ¿Qué ocurre con (a) para 100 pasos? ¿y con (b)? ¿Por qué cree que resulta mucho más estable este último caso?

Sug.: El dato inicial coincide con un autovector de la matriz tridiagonal resultante.

5. En los casos del ejercicio previo, resolver analíticamente y estudiar el comportamiento del error hasta el tiempo $T_f = 1$ utilizando el programa del ejercicio 2. Tome $r = 0.5$ y diversos pasos de discretización en t y x . Graficar $\log(E_n)$ en cada paso de tiempo, donde $E_n = \max_{0 \leq j \leq N} \{|e_j^n|\}$, $N = 1/h$. Observe que el error decrece a medida que el tiempo avanza lo que indica que la cota (1) obtenida el ejercicio 1 no es demasiado buena.

6. Idem que el ejercicio anterior pero con

$$(a) \quad u_t = u_{xx} - 2 \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad u(x, 0) = 0,$$

$$(b) \quad u_t = u_{xx} \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad u(x, 0) = 1.$$

¿Qué nota en 2)? ¿A que supone que se debe?

7. Dado $J \in \mathbb{N}$ sea $h = \frac{1}{J}$ y considerar el producto interno $(v, w) = h \sum_{j=0}^J v_j w_j$ para $v, w \in \mathbb{R}^{J+1}$, y sea $l_{2,h}^0$ el subespacio de \mathbb{R}^{J+1} dado por $l_{2,h}^0 = \{v = (v_0, v_1, \dots, v_J) \in \mathbb{R}^{J+1} : v_0 = v_J = 0\}$. Para cada $p = 1, \dots, J-1$, sea $\varphi_p \in l_{2,h}^0$ definido por

$$\varphi_{p,j} = \sqrt{2} \sin(\pi p j h), \quad j = 0, \dots, J.$$

Probar que $\{\varphi_p : p = 1, \dots, J\}$ es una base ortonormal de $l_{2,h}^0$.

8. (a) Usando el método de Fourier probar que el esquema en diferencias propuesto en el Ej. 1 es estable para $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$.

- (b) Considere el esquema en diferencias

$$u_j^{n+1} - u_j^{n-1} = 2r(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n)$$

¿Cuál es el error de truncado? ¿Es estable?

9. Considerar la ecuación $u_t = au_{xx}$ con condiciones de Dirichlet homogéneas y con a positivo. Para el método implícito de primer orden:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = ra(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1})$$

- (a) Probar utilizando el método de Fourier que el método es estable para cualquier valor de r . Estudiar también la estabilidad en norma $\|\cdot\|_{\infty, h}$.

- (b) Probar que el error de truncado es $O(k) + O(h^2)$.

10. Estudiar la estabilidad y el error de truncado para el método θ , con $0 \leq \theta \leq 1$:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = ra\{(\theta(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1})) + (1 - \theta)(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n)\}$$

¿Qué ocurre si $\theta = 1/2$?

11. Escriba un programa que permita integrar la ecuación del calor con el método de Crank-Nicolson. Estudie numéricamente si la condición $r \leq 1$ es necesaria para tener principio del máximo en el esquema. Sug.: Tomar un dato inicial que valga cero en todos los nodos salvo en uno.
12. Considerar la ecuación del calor $U_t = U_{xx}$, en el intervalo $[0, 1]$, con condiciones de Neumann en el borde. Hallar un método centrado en x , y explícito en t de primer orden. Analizar la estabilidad del esquema en diferencias obtenido.
13. Dada la ecuación cuadrática $z^2 + bz + c = 0$ con b y c en \mathbb{R} . Demuestre que las raíces están en el círculo unitario $\Leftrightarrow |c| \leq 1$ y $|b| \leq 1 + c$. (Este resultado facilita el análisis de estabilidad por el método de Fourier para esquemas de tres capas).
14. Para aproximar las soluciones de $u_t = u_{xx}$ considere $0 \leq \theta \leq 1$ y tome

$$\theta \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2} \right) + (1 - \theta)(u_j^n - u_j^{n-1}) = r(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

- (a) Estudie el error de truncado en términos de θ .
 - (b) Analizar la estabilidad usando el método de Fourier. ¿A qué conclusión llega?
15. Considerar el esquema en diferencias de tres capas completamente implícito para la ecuación del calor $U_t = aU_{xx}$:

$$\frac{3}{2} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} - \frac{1}{2} \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{k} - aL_{xx}u_j^{n+1} = 0$$

donde k es el paso de integración en t , y $L_{xx}u_j^n = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$. ¿Cuál es el orden del error de truncado? Estudie la estabilidad con el método de Fourier.

16. Para aproximar la ecuación $u_t = u_{xx}$ se propone el siguiente esquema:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{\theta \delta_{xx}(u_j^n) + (1 - \theta) \delta_{xx}(u_j^{n-1})}{(\Delta x)^2}$$

con $0 \leq \theta \leq 1$, y $\delta_{xx}(u_j^q) = u_{j+1}^q - 2u_j^q + u_{j-1}^q$.

- (a) Demostrar que el esquema es consistente cualquiera sea θ .
 - (b) Demostrar que el método propuesto es estable si $\theta \leq \frac{1}{2}$ y $4r(1 - \theta) \leq 1$ con $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$.
17. Para la siguiente ecuación

$$u_t = u_{xx} + \alpha u$$

se propone la aproximación

$$u_j^{n+1} - u_j^n = r(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \alpha \Delta t u_j^n$$

para $\alpha < 0$ hallar condiciones sobre r que aseguren la estabilidad, si $\alpha > 0$ halle r de modo tal que el radio espectral de la matriz de iteraciones resultante M verifique $\rho(M) \leq (1 + \Delta t \alpha)$ en tal caso demuestre que bajo tales condiciones, si llamamos $\frac{T_{final}}{\Delta t} = N$, se tiene $\|M^N\|_2 \leq C$, C independiente de $\Delta x, \Delta t$, y entonces el esquema resulta estable.

18. Para $a > 0$, se quieren aproximar las soluciones de $u_t = au_{xx} + u_x$ con un esquema de dos capas explícito en t , centrado de segundo orden en x . Dar condiciones sobre r que aseguren la estabilidad. ¿Qué sucede si $a \rightarrow 0$? ¿Qué sucede si discretiza $u_x = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}$? Estudie el error de truncado en ambos casos.

19. Se tiene el problema

$$u_t = u_{xx} + \frac{2}{x}u_x \quad x \in (0, 1) \quad t > 0$$

con las condiciones de borde e iniciales:

$$u_x(0, t) = 0 \quad u(1, t) = 0 \quad u(x, 0) = 1 - x^2$$

escriba un esquema explícito en t , centrado de segundo orden en x y de condiciones suficientes sobre $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ para asegurar la estabilidad. Implemente el algoritmo numéricamente.

20. Para aproximar la ecuación $U_t = U_{xx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$ con condiciones de Dirichlet homogéneas y dato inicial $U(x, 0) = U_0(x)$ se propone el esquema :

$$u_j^{n+1} - u_j^n = r \alpha L_{xx}(u_j^{n+1}) + r(1 - \alpha)L_{xx}(u_j^n)$$

donde $L_{xx}(u_j^q) = u_{j+1}^q - 2u_j^q + u_{j-1}^q$, $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{12r}$, $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$.

(a) Demostrar que el esquema es incondicionalmente estable en $\|\cdot\|_2$.

(b) Demostrar que si $r \in [\frac{1}{6}, \frac{7}{6}]$ se tiene principio del máximo.

21. Se busca aproximar la solución de la ecuación

$$u_t = a(x, t)u_{xx} \quad x \in (0, 1) \quad t > 0$$

con condiciones de borde de tipo dirichlet homogéneas, y para ello se utiliza el esquema

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{r}{2}a_j^{n+1/2}(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

Estudie estabilidad y error de truncado asumiendo que $a(x, t) \geq 0$. Dar condiciones para que valga el principio del máximo. Reemplace en el esquema $a_j^{n+1/2}$ por $\frac{a_j^{n+1} + a_j^n}{2}$ y repita los cálculos.

22. Discretizando las derivadas en x con diferencias centradas halle un esquema explícito que aproxime la solución de la ecuación

$$u_t = (a(x, t)u_x)_x$$

con condiciones de borde homogéneas. Estudie estabilidad, error de truncado y principio del máximo para el esquema obtenido.

23. Dada la ecuación del calor en 2-dimensiones

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} \quad \text{con } (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \quad t > 0$$

Se propone el siguiente esquema de diferencias explícito

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n + r_x(u_{i+1j}^n - 2u_{ij}^n + u_{i-1j}^n) + r_y(u_{ij+1}^n - 2u_{ij}^n + u_{ij-1}^n)$$

donde $r_x = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ y $r_y = \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$. Hallar el error de truncado local y dar condiciones sobre r_x y r_y para garantizar la estabilidad.

24. Resolver numéricamente la ecuación del calor $u_t = \Delta u$ en el rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$ con condición de borde de tipo Dirichlet y dato inicial $u_0(x, y)$ utilizando el esquema de diferencias propuesto en el ejercicio anterior.