Topología 2010

Práctica 8 - Teorema de Van Kampen

---

1. Sea $X = A \cup B$ con A, B cerrados de X simplemente conexos y localmente arco-conexos tales que $A \cap B$ consiste en un solo punto. Probar que si $p : E \to B$ es un revestimiento, entonces p es un homeomorfismo.

2. Sea $X = U \cup V$ con U, V abiertos arcoconexos tales que $U \cap V$ es no vacío y arco-conexo, y sea $\psi : U \to X$ la inclusión.

   a) Probar que si V es simplemente conexo, entonces $\psi_* : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ es epimorfismo.

   b) Probar que si V y $U \cap V$ son simplemente conexos, entonces $\psi_* : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ es isomorfismo.

3. Sea x un punto de $\mathbb{R}^2$ y sea $X_n \subset \mathbb{R}^2$ la unión de n circunferencias $C_1, ..., C_n$ tales que $C_i \cap C_j = \{x\}$ para todo i, j. Probar que $\pi_1(X_n, x)$ es el grupo libre con n generadores.

4. Sea $Y_n \subset \mathbb{R}^2$ el siguiente conjunto:

$$Y_n = \{p \in \mathbb{R}^2 : \exists j \in \{1, ..., n\} / |p - (j - 1/2, 0)| = 1/2\}$$

   Calcular $\pi_1(Y_n, 0)$.

5. Probar que la esfera n-dimensional S^n es simplemente conexa para $n \geq 2$. Concluir que el grupo fundamental del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es el grupo cíclico de orden 2 para $n \geq 2$.

6. Calcular los grupos fundamentales de los siguientes espacios.

   a) $T \setminus \{y\}$, el toro sin un punto.

   b) $P^2(\mathbb{R}) \setminus \{y\}$, el plano proyectivo sin un punto.

   c) $S^n \vee S^n$, la unión por un punto de dos copias de S^n.

   d) $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$.

   e) $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R})$.

   f) $S^1 \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$.

   g) $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$.

7. Sea $X = I \times I / \sim$ donde $(x, y) \sim (x', y')$ si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

$$(x = x' \text{ e } y = y') \text{ ó } (\{y, y'\} = \{0, 1\} \text{ y } x = x') \text{ ó } (\{x, x'\} = \{0, 1\} \text{ y } y + y' = 1)$$

   El espacio X es la *Botella de Klein*. Calcular el grupo fundamental de X.

8.
   a) Probar que el grupo fundamental del espacio $P^2(\mathbb{R}) \vee P^2(\mathbb{R})$ es infinito.
   b) Probar que existe un isomorfismo

   $$\pi_1(P^2(\mathbb{R}) \vee P^2(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$$

   para una acción conveniente $\mathbb{Z}_2 \curvearrowright \mathbb{Z}$.

9. Sea L_k una variedad lineal en $\mathbb{R}^n$ de dimensión k, $0 \leq k \leq n-2$. Calcular $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus L_k)$.

10. Sea C una circunferencia en $\mathbb{R}^3$. Probar que $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus C) = \mathbb{Z}$.
    Sugerencia: deformar $\mathbb{R}^3 \setminus C$ *en* $S^2 \vee S^1$.