Topología 2010

Práctica 7 - Fibraciones y revestimientos

Fibraciones

1. Probar que las fibraciones forman una clase buena de funciones.
2. Sean X, Y espacios topológicos. Probar que la proyección $\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$ es una fibración con fibra Y. Probar además que si Y es discreto, entonces pr_1 es un revestimiento.
3. Probar que si $p : E \to B$ es una fibración con l.u.c. y B es arcoconexo, entonces todas las fibras son homeomorfas.
4. Sea $p : E \to B$ una fibración. Probar que si B es arcoconexo y alguna fibra E_b es arcoconexa, entonces E es arcoconexo.
5. Sea $p : E \to B$ una fibración. Sea $b \in B$ y sea $e_0 \in E_b$. Probar que si B es simplemente conexo, entonces la inclusión de la fibra E_b en E induce un epimorfismo $i_* : \pi_1(E_b, e_0) \to \pi_1(E, e0)$.
6. Sea $p : E \to B$ una fibración. Sea $b \in B$ y $e \in E_b$. Probar que si la fibra E_b es simplemente conexa entonces $p_* : \pi_1(E, e) \to \pi_1(B, b)$ es un isomorfismo.
7. Sea $p : E \to B$ una fibración. Sean α, β caminos en B con $\alpha(1) = \beta(0)$. Sean $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ levantados de α, β tales que $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(0)$. Probar que $\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}$ es un levantado de $\alpha * \beta$.

Revestimientos

8. Probar que las siguientes funciones son revestimientos:
   a) $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$.
   b) $f : S^1 \to S^1$, $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ fijo.
   c) $p : S^n \to P^n$ la proyección al plano proyectivo.
   d) G grupo topológico, H subgrupo discreto de G y $p : G \to G/H$ la proyección al cociente.
   e) $p : E \to B$, $p(x, y) = (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})$, donde $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Z} \text{ ó } y \in \mathbb{Z}\}$ y $B = \{(z, w) \in S^1 \times S^1 : z = 1 \text{ ó } w = 1\}$.
9. Probar que $p : \mathbb{R}_{>0} \to S^1$ definida por $p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$ es un homeomorfismo local pero no es un revestimiento.
10. Probar que si $p : E \to B$ es un revestimiento, entonces p es abierta.
11. Probar que si $p : E \to B$ y $p' : E' \to B'$ son revestimientos, entonces $p \times p' : E \times E' \to B \times B'$ también lo es.
12. Sean $p : X \to Y$ y $q : Y \to Z$ revestimientos. Probar que si $q^{-1}(z)$ es finito para cada $z \in Z$, entonces $qp : X \to Z$ es un revestimiento.

13. Probar que en un cuadrado cartesiano de espacios,

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p'"'] \arrow[dr, phantom, "\text{pb}"] & X \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

si p es revestimiento entonces p' también. En particular, si $p : E \to B$ es revestimiento y $A \subset B$, entonces $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \to A$ es revestimiento.

14. Sea B un espacio conexo y localmente conexo, y sea $p : E \to B$ un revestimiento. Probar que si C es una componente de E, entonces $p|_C : C \to B$ es un revestimiento.

15. Sea $p : \mathbb{R} \to S^1$ el revestimiento usual. Probar que $f : X \to S^1$ puede levantarse a una función continua $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que $p\tilde{f} = f$ si y sólo si f es homotópica a una constante.

16. Sea $p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$ el revestimiento usual del toro. Sea ω el camino

$$w(t) = ((\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t), (\cos 4\pi t, \operatorname{sen} 4\pi t)).$$

Dibujar w en el toro inmerso en $\mathbb{R}^3$, y calcular y dibujar un levantado $\tilde{\omega}$.

17. Sea $G \curvearrowright X$ la acción de un grupo G sobre un espacio X. La acción es *libre* si $gx \neq x$ para todo $x \in X$ y todo $g \in G$, $g \neq e$. La acción es *propiamente discontinua* si para todo $x \in X$ existe U entorno abierto de x tal que $gU \cap U = \emptyset$ para todo $g \in G$, $g \neq e$.

    a) Probar que si G es finito, X es Hausdorff y la acción es libre, entonces es propiamente discontinua.
    b) Probar que si G actúa en X y la acción es propiamente discontinua, entonces la proyección $p : X \to X/G$ es un revestimiento.
    c) Sea $X = \mathbb{R} \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Sea $G \subset \operatorname{Aut}(X)$ el subgrupo generado por ϕ,donde $\phi(z) = z + 1 + i$. Probar que la acción de G en X es propiamente discontinua, y que X/G es homemomorfo a la banda de Möbius.

Aplicaciones

18. Sea $p : E \to B$ un revestimiento, E arcoconexo, y sea $p(e_0) = b_0$.

    a) Probar que si $\pi_1(B, b_0) \cong \mathbb{Z}$, entonces o bien $\pi_1(E, e_0) \cong \mathbb{Z}$ o bien $\pi_1(E, e_0) \cong 0$.
    b) Probar que si $\pi_1(B, b_0)$ es finito, entonces $\pi_1(E, e_0)$ también y además vale

    $$|\pi_1(B, b_0)| = |\pi_1(E, e_0)|.|p^{-1}(b_0)|$$

    c) Concluir que si B es simplemente conexo, entonces p es un homeomorfismo.

19. Calcular el grupo fundamental de los siguientes espacios.

   a) $X = S^1 \times [0, 1]$, un cilindro.
   b) $X = S^1 \times \mathbb{R}$, un cilindro infinito.
   c) $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, el plano pinchado.
   d) $X = M$, la banda de Möbius.
   e) $X = T = S^1 \times S^1$, el toro usual.
   f) $X = \mathbb{R}^3 \setminus L$, donde L es una recta o un plano.

20. ea $b_0 = (1, 0) \in S^1$, y sea γ un generador de $\pi_1(S^1, b_0)$. Si x_0 es cualquier punto de S^1, escojamos un camino α en S^1 de b_0 a x_0, y definamos $\gamma(x_0) = \widehat{\alpha}(\gamma)$. Entonces $\gamma(x_0)$ genera $\pi_1(S^1, x_0)$. El elemento $\gamma(x_0)$ es independiente de la elección del camino α (por qué?). Sean $h : S^1 \to S^1$, sea $x_0 \in S^1$ y sea $h(x_0) = x_1$. El morfismo $h_* : \pi_1(S^1, x_0) \to \pi_1(S^1, x_1)$ satisface

$$h_*(\gamma(x_0)) = d.\gamma(x_1)$$

para algún $d \in \mathbb{Z}$. El entero d se llama el *grado* de h y de senota por $\deg h$.

   (a) Demostrar que d es independiente de la elección de x_0 y de γ.
   (b) Probar que si $h, k : S^1 \to S^1$ son homotópicas entonces tienen el mismo grado.
   (c) Demostrar que $\deg(h \circ k) = \deg h. \deg k$.
   (d) Calcular los grados de una aplicación constante, de la identidad, de la reflexión $\rho(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$ y de la aplicación $h(z) = z^n$.
   (e) Probar que si $h, k : S^1 \to S^1$ tienen el mismo grado entonces son homotópicas.