Topología 2010

Práctica 5 - Compactificación de Stone-Cech; Espacios de funciones

Compactificación

1. Sea Y una compactificación arbitraria de X, y sea $\beta(X)$ la compactificación de Stone-Cech. Probar que existe una función cerrada y suryectiva $g : \beta(X) \to Y$ que se restringe a la identidad de X.

2. *a*) Probar que si $f : S_\Omega \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es eventualmente constante.
   b) Probar que la compactificación en un punto de S_Ω y la compactificación de Stone-Cech son equivalentes.
   c) Concluir que toda compactificación de S_Ω es equivalente a la compactificación en un punto.

3. Sea X completamente regular. Probar que X es conexo si y sólo si $\beta(X)$ es conexo.

4. Sea X discreto.
   a) Probar que si $A \subset X \subset \beta(X)$, entonces $\overline{A}$ y $\overline{X \setminus A}$ son disjuntos, donde las clausuras se toman en $\beta(X)$.
   b) Probar que si U es abierto en $\beta(X)$, entonces $\overline{U}$ es abierto en $\beta(X)$.
   c) Probar que $\beta(X)$ es totalmente disconexa.

Espacios de funciones

5. Sean X un espacio topológico e (Y, d) un espacio métrico.
   a) Probar que en Y^X se tienen las siguientes inclusiones de topologías:
   $$\text{(uniforme)} \supset \text{(convergencia compacta)} \supset \text{(convergencia puntual)}$$
   b) Probar que si X es compacto, entonces las dos primeras coinciden.
   c) Probar que si X es discreto, entonces las dos últimas coinciden.

6. Decidir con cuáles de las topologías del ejercicio anterior la sucesión $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = 1/nx$, tiene límite.

7. Probar que (en general) el conjunto de funciones acotadas $f : X \to \mathbb{R}$ no es cerrado en $\mathbb{R}^X$ con la topología de convergencia compacta.

8. Considere la sucesión de funciones $f_n : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por
   $$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k.$$
   a) Probar que f_n converge con la topología de convergencia compacta. Concluir que la función límite es continua.

b) Probar que f_n no converge con la topología uniforme.

9. Sea (Y, d) un espacio métrico, y sea X un espacio. Dada $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ y dada una función continua positiva $\delta : X \to \mathbb{R}_+$, sea

$$B(f, \delta) = \{g \mid d(f(x), g(x)) < \delta(x) \text{ for all } x \in X\}$$

   a) Probar que los conjuntos $B(f, \delta)$ forman una base para una topología en $\mathcal{C}(X, Y)$, a la que llamaremos *topología fina*.

   b) Probar que la topología fina es más fina que la uniforme.

   c) Probar que si X es compacto, entonces las topologías fina y uniforme coinciden.

   d) Probar que si X es discreto, entonces $\mathcal{C}(X, Y) = Y^X$ y las topologías fina y caja coinciden.

10. Sea (Y, d) un espacio métrico, y sea X un k-espacio. Probar que $\mathcal{C}(X, Y)$ es cerrado en Y^X para la topología de convergencia compacta.

11. Probar que si Y es Hausdorff (resp. regular), entonces $\mathcal{C}(X, Y)$ es Hausdorff (resp. regular) con la topología compacto-abierta.

12. Sea A un subespacio de X. Probar que la restricción $r : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{C}(A, Y)$ es continua si se considera ambos espacios con la topología compacto-abierta.

13. Sea Y localmente compacto y Hausdorff. Probar que la composición

$$\circ : \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \to \mathcal{C}(X, Z)$$

   es continua con la topología compacto-abierta.

14. Sea $\mathcal{T}$ una topología para $\mathcal{C}(X, Y)$. Probar que si la evaluación

$$e : \mathcal{C}(X, Y) \times X \to Y$$

   es continua, entonces $\mathcal{T}$ es más fina que la compacto-abierta.

15. Probar que si $p : E \to B$ es cociente y X es localmente compacto y Hausdorff, entonces $p \times id : E \times X \to B \times X$ es cociente.

Anillo de funciones

16. Sea X compacto y Hausdorff, y sea $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ el anillo de funciones reales con las operaciones punto a punto. Este ejercicio muestra que el anillo $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ caracteriza completamente al espacio X. Se define $H(X)$ como el conjunto de todos los morfismos de anillos $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, equipado con la topología de convergencia puntual.

   a) Probar que si $I \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ es un ideal maximal, entonces existe $x_0 \in X$ tal que $I = \{f \mid f(x_0) = 0\}$.

   b) Probar que si $\omega \in H(X)$, entonces ω es suryectivo y satisface $\omega(\lambda u) = \lambda$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, donde u es la unidad de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

   c) Concluir que los únicos elementos de $H(X)$ son las evaluaciones ϵ_x, $x \in X$.

   d) Sea $\epsilon : X \to H(X)$ dado por $\epsilon(x) = \epsilon_x$. Probar que ϵ es un homeomorfismo.