

Topología 2010

Práctica 4 - Compactos; Axiomas de separación

Compactos

- Sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ dos topologías en X .
 - Probar que si \mathcal{T}' es más fina que \mathcal{T} y X es compacto para \mathcal{T}' , entonces X también es compacto para \mathcal{T} .
 - Probar que si X es compacto y Hausdorff tanto para \mathcal{T} como para \mathcal{T}' , entonces ambas topologías coinciden o no son comparables.
- Probar que si X tiene la topología del complemento finito, entonces es compacto.
- Decidir si $[0, 1]$ es compacto para
 - la topología $\{U : [0, 1] \setminus U \text{ es numerable o igual a } [0, 1]\}$.
 - la topología de subespacio de \mathbb{R}_l .
- Sea X Hausdorff y sean $A, B \subset X$ compactos y disjuntos. Probar que existen abiertos disjuntos U, V tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.
- Mostrar que si $f : X \rightarrow Y$ es continua, donde X es compacto e Y es Hausdorff, entonces f es cerrada.
- Sea $f : X \rightarrow Y$, con Y compacto y Hausdorff. Probar que f es continua si y sólo si el gráfico de f definido por $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ es cerrado en $X \times Y$.
- Sea $p : X \rightarrow Y$ suryectiva y cerrada. Probar que si Y es compacto y además $p^{-1}(y)$ es compacto para todo $y \in Y$, entonces X es compacto.
- Considere el siguiente producto fibrado.

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \text{pb} & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & Y \end{array} \quad P = X \times_Y Z$$

Probar que si X y Z son compactos, e Y Hausdorff, entonces P es compacto.
Hallar un ejemplo en el que Y no sea Hausdorff y P no sea compacto.

- Sea $f : X \rightarrow Y$ suryectiva y propia. Probar que si X es Hausdorff, entonces Y también lo es.

Localmente compactos

- Probar que \mathbb{Q} no es localmente compacto.
- Probar que $[0, 1]^\omega$ no es localmente compacto con la topología uniforme.

12. Probar que si $\prod_{i \in I} X_i$ es localmente compacto, entonces cada X_i es localmente compacto y todos los X_i , salvo una cantidad finita, son compactos.
13. Probar que si X es localmente compacto y $f : X \rightarrow Y$ es abierta, entonces $f(X)$ también es localmente compacto.
Hallar un ejemplo que muestre que la hipótesis f abierta es necesaria.

Compactificación de Alexandroff

14. Probar que la compactificación a un punto de \mathbb{N} es homeomorfa a $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ con la topología subespacio de \mathbb{R} .
15. Usando la proyección estereográfica $p : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$p(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$$

probar que la compactificación a un punto de \mathbb{R}^n es homeomorfa a S^n .

16. Probar que si $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo de espacios de Hausdorff localmente compactos, entonces f se extiende a un homeomorfismo entre sus compactificaciones a un punto.

Grupos topológicos

17. Probar que $(\mathbb{R}, +)$, (S^1, \cdot) y $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ son grupos topológicos.
18. Probar que G es un grupo topológico si y sólo si la función $H : G \times G \rightarrow G$, $H(g, h) = g \cdot h^{-1}$ es continua.
19. Probar que para cada $a \in G$, las funciones $L_a : G \rightarrow G$ y $R_a : G \rightarrow G$, definidas por $L_a(g) = a \cdot g$, $R_a(g) = g \cdot a$ son homeomorfismos.
20. Sea G un grupo topológico, sea e el neutro de G y sea U abierto que contiene a e . Probar que existe V abierto que contiene a e tal que $V \cdot V \subset U$ y $V^{-1} \subset U$.
21. Probar que si un grupo topológico G es T_0 , entonces es T_2 .
22. Probar que si H es un subgrupo de un grupo topológico G , entonces la clausura de H es también un subgrupo. Probar que si H es invariante, entonces su clausura también.
23. De los grupos topológicos $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $O(n, \mathbb{R})$, $SO(n, \mathbb{R})$, decidir cuáles son compactos y cuáles son conexos.

Axiomas de separación

24. Probar que si X es regular, entonces todo par de puntos de X admiten entornos cuyas clausuras son disjuntas.
25. Probar que si X es normal, entonces todo par de cerrados disjuntos de X admiten entornos cuyas clausuras son disjuntas.

26. Probar que un subespacio cerrado de un espacio normal es normal.
27. Probar que si X tiene la topología del orden, entonces X es regular.
28. Sea $\{X_\alpha\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Probar que si $\prod X_\alpha$ es Hausdorff o regular o normal, entonces también lo es cada X_α .
29. Sea X un conjunto y sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ topologías en X tales que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Suponiendo que X es Hausdorff (o regular o normal) con una de estas topologías, decidir que puede deducirse de X con la otra topología.
30. Probar que si X es Hausdorff y localmente compacto, entonces es regular.
31. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ continuas, Y Hausdorff. Probar que $\{x : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X .
32. Probar que si X es normal y conexo entonces tiene un solo punto o es no numerable.
33. Sea X regular con una base de abiertos numerable. Sea U un abierto de X .
 - a) Probar que U es unión de numerables cerrados de X .
 - b) Probar que existe $f : X \rightarrow I$ tal que $f(x) > 0$ si $x \in U$ y $f(x) = 0$ si $x \notin U$.
34. Sea X metrizable. Probar que son equivalentes:
 - a) X es acotado para toda métrica que induzca la topología de X .
 - b) Toda función continua $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada.
 - c) X es compacto.
35. Sea Z un espacio topológico. Si Y es un subespacio de Z , decimos que Y es retracto de Z si existe una función continua $r : Z \rightarrow Y$ tal que $r(y) = y$ para todo $y \in Y$.
 - a) Probar que si Z es Hausdorff e Y es un retracto de Z , entonces Y es cerrado en Z .
 - b) Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ con dos elementos. Probar que A no es un retracto de \mathbb{R}^2 .
 - c) Probar que S^1 es un retracto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. ¿Es S^1 un retracto de \mathbb{R}^2 ?
36. Probar que si Y es normal con base \mathcal{B} , entonces Y es subespacio de $[0, 1]^J$ con $J \subset \mathcal{B} \times \mathcal{B}$.
37. Probar que si $\{f_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}\}$ es una familia de funciones continuas que separan puntos de cerrados, entonces es inicial.
38. Probar que si X es Hausdorff y localmente compacto, entonces es completamente regular.
39. Probar que $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ no es normal, pero es completamente regular.
40. Sea X completamente regular. Sean A, B cerrados disjuntos de X . Probar que si A es compacto, entonces existe una función continua $f : X \rightarrow I$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$.