Topología 2010

Práctica 10 - Homología

Un poco de álgebra homológica

1. Sea $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ una sucesión exacta. Probar que son equivalentes:

   a) f es sección.

   b) g es retracción.

   c) Existe un isomorfismo $\phi : N \to M \oplus P$ tal que $\phi f(m) = (m, 0)$ y $g\phi^{-1}(m, p) = p$.

2. Hallar todos los grupos abelianos posibles M en las siguientes sucesiones exactas:

   a) $0 \to \mathbb{Z}_2 \to M \to \mathbb{Z}_4 \to 0$

   b) $0 \to \mathbb{Z}_m \to M \to \mathbb{Z}_n \to 0$

   c) $0 \to Z_m \to M \to \mathbb{Z}^n \to 0$

3. (Lema de los 5) Dado el siguiente diagrama de filas exactas

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & M_5 \arrow[d, "e"'] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5
\end{tikzcd}$$

   Probar que

   a) Si b y d son mono y a es epi, entonces c es mono.

   b) Si b y d son epi y e es mono, entonces c es epi.

   c) Concluir que si a, b, d y e son iso, entonces c es iso.

4. (Lema de la serpiente) Considerar el diagrama conmutativo de grupos abelianos con filas exactas.

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[r] \arrow[d, "a"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "b"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 &
\end{tikzcd}$$

   a) Probar que hay una sucesión exacta inducida por las flechas del diagrama

$$\ker(a) \to \ker(b) \to \ker(c) \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker}(a) \to \operatorname{coker}(b) \to \operatorname{coker}(c)$$

   b) Probar que si $M_1 \to M_2$ es mono, entonces también lo es $\ker(a) \to \ker(b)$.

   c) Probar que si $N_2 \to N_3$ es epi, entonces también lo es $\operatorname{coker}(b) \to \operatorname{coker}(c)$.

5. Probar que una sucesión exacta corta de complejos de cadenas

$$0 \to A_* \xrightarrow{f} B_* \xrightarrow{g} C_* \to 0$$

induce una sucesión exacta larga de homología

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{f_n} H_n(B) \xrightarrow{g_n} H_n(C) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{f_{n-1}} H_{n-1}(B) \xrightarrow{g_{n-1}} \dots$$

Esta construcción es *natural.* ∂_n se llama *morfismo de conexión.*

6. Sean (C_*, d) y (D_*, d') complejos. Probar que $(C_* \oplus D_*, d \oplus d')$ es un complejo y que
$$H_*(C \oplus D) = H_*(C) \oplus H_*(D).$$

7. Sea $m \in \mathbb{N}$. Calcular la homología del siguiente complejo de cadenas:

$$\dots \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \dots \qquad d_{2n}(x) = 0 \quad d_{2n+1}(x) = mx$$

8. Sean $f_*, g_* : (C_*, d) \to (D_*, d')$ morfismos. Una *homotopía* $\phi : f_* \cong g_*$ es una familia de morfismos $\{\phi_n : C_n \to D_{n+1}\}_n$ tales que $d'_{n+1}\phi_n + \phi_{n-1}d_n = f_n - g_n$.

    a) Probar que las homotopías definen una relación de equivalencia.

    b) Probar que si f_* y g_* son homotópicos entonces inducen el mismo morfismo en la homología:

    $$f_* \cong g_* : C_* \to D_* \quad \Rightarrow \quad f_* = g_* : H_n(C) \to H_n(D)$$

Homología singular

9. Sea X espacio topológico y $\{X_k\}$ familia de componentes arco conexas de X. Probar que
$$H_n(X) = \oplus H_n(X_k).$$

10. Sea $A \subset X$. Probar que $H_0(X, A) = 0$ si y sólo si A interseca todas las componentes arco conexas de X.

11. Sea $A \subset X$ un subespacio. Sea $\sigma \in S_n(X)$. σ es un *n-ciclo relativo* si $d\sigma \in S_{n-1}(A)$, y σ es un *n-borde relativo* si $\sigma = d\omega + \gamma$ con $\omega \in S_{n+1}(X)$ y $\gamma \in S_n(A)$. Probar que
$$H_n(X, A) = \frac{n\text{-ciclos relativos}}{n\text{-bordes relativos}}$$
Probar además que el morfismo de conexión $\partial : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$ cumple que si $\overline{\sigma}$ es la clase de un ciclo relativo en $H_n(X, A)$, entonces $\partial(\overline{\sigma})$ es la clase del ciclo $d\sigma$ en $H_{n-1}(A)$.

12. Probar que una función continua de pares $f:(X,A)\to(Y,B)$ induce un morfismo $f_*:H_n(X,A)\to H_n(Y,B)$ $\forall n$ y que una homotopía de pares $h: f\simeq g:(X,A)\to(Y,B)$ induce una homotopía $\phi: f_*\simeq g_*$ entre los complejos relativos y por lo tanto $f_*=g_*:H_n(X,A)\to H_n(Y,B)$.

13. Probar que $H_1(\mathbb{R},\mathbb{Q})$ es un grupo abeliano libre y calcular una base.

14. Probar que si $i:A\to X$ es un retracto, entonces $i_*:H_n(A)\to H_n(X)$ es mono, y que si i es retracto por deformación i_* es iso.

15. *a*) Sea $\{X_i\}$ una familia de espacios topológicos y sea $x_i\in X_i$ tal que (X_i,x_i) es un par bueno. Si $X=\bigvee_i X_i$ es la unión de los espacios, identificando todos los puntos bases x_i, probar que $\tilde{H}_n(X)=\oplus_i\tilde{H}_n(X_i)$.

    b) Calcular $\tilde{H}_n(\bigvee\limits_{i\in I} S^k)$. Calcular $H_n(\mathbb{R}^n-\{x_1,\dots,x_m\})$.

16. *a*) Sea $A\subset X$ retracto. Probar que $H_q(X)=H_q(A)\oplus H_q(X,A)$.

    b) Sea X espacio topológico y sea $p\in S^n$. Deducir del item anterior que
    $$H_q(X\times S^n)=H_q(X)\oplus H_q(X\times S^n,X\times\{p\})$$

    c) Probar la sucesión relativa de Mayer-Vietoris: Sea (X,Y) par topológico, sean $A,B\subset X$ tales que $int\ A\cup int\ B=X$ y sean $C\subset A$ y $D\subset B$ tales que $int\ D\cup int\ C=Y$. Probar que existe una sucesión exacta larga
    $$\ldots\to H_q(A\cap B,C\cap D)\to H_q(A,C)\oplus H_q(B,D)\to H_q(X,Y)\to\ldots$$

    d) Probar, usando el item anterior, que
    $$H_q(X\times S^n,X\times\{p\})=H_{q-1}(X\times S^{n-1},X\times\{p\})$$

    e) Deducir que
    $$H_q(X\times S^n,X\times\{p\})=H_{q-n}(X)$$
    y por lo tanto se obtiene el siguiente resultado interesante:
    $$H_q(X\times S^n)=H_q(X)\oplus H_{q-n}(X)$$

    f) Calcular $H_q(S^n\times S^m)$ y $H_q(T_n)$ donde $T_n=S^1\times\cdots\times S^1$ (n veces).

Algunas aplicaciones

17. Probar que S^n no es un retracto de D^{n+1} y que toda función continua $f: D^n\to D^n$ tiene algún punto fijo.

18. Sean $U\subset\mathbb{R}^n$ y $V\subset\mathbb{R}^m$ abiertos no vacíos. Probar que si U y V son homeomorfos entonces $n=m$.

19. Sea $X\subset\mathbb{R}^n$ abierto. Probar que toda función $f:X\to\mathbb{R}^n$ continua e inyectiva es abierta.

20. Sea $X\subset\mathbb{R}^n$ abierto no vacío. Probar que si existe una función continua e inyectiva $f:X\to\mathbb{R}^m$, entonces $m\geq n$.