Topología 2010

Práctica 0 - Conjuntos bien ordenados

1. **Principio general de definición recursiva.** Sean J un conjunto bien ordenado y C un conjunto. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las funciones que aplican secciones de J en C. Dada una función $\rho : \mathcal{F} \to C$, existe una única función $h = h(\rho) : J \to C$ tal que
$$(*) \quad h(\alpha) = \rho(h|_{S_\alpha})$$
para todo $\alpha \in J$.

   a) Probar que si h, k son dos funciones definidas en J o en una sección de J y verifican $(*)$ para todo α en sus respectivos dominios, entonces $h(\alpha) = k(\alpha)$ para todo α en ambos dominios.

   b) Probar que si existe $h : S_\alpha \to C$ que verifica $(*)$, entonces existe $k : S_\alpha \cup \{\alpha\} \to C$ que verifica $(*)$.

   c) Probar que si $K \subset J$ y para todo $\alpha \in K$ existe una función $h_\alpha : S_\alpha \to C$ que verifica $(*)$, entonces existe una función
$$k : \bigcup_{\alpha \in K} S_\alpha \to C$$
que verifica $(*)$.

   d) Probar que para todo $\beta \in J$ existe $h_\beta : S_\beta \to C$ que verifica $(*)$.
Sugerencia: estudiar por separado el caso en que β tiene un predecesor inmediato del que no.

   e) Probar el principio general de definición recursiva.

2. *a*) Sean J, E conjuntos bien ordenados, y sea $h : J \to E$. Probar que son equivalentes:

   1) h preserva el orden y su imagen es E o una sección de E.
   2) $h(\alpha) = \min(E \setminus h(S_\alpha))$ para todo $\alpha \in J$.

   Sugerencia: cada una de las propiedades implica que $h(S_\alpha)$ es una sección de E; concluya que debe ser la sección por $h(\alpha)$.

   b) Probar que si E es un conjunto bien ordenado, entonces el tipo de orden de una sección de E es distinto del tipo de orden de E, y que dos secciones distintas de E tienen tipos de orden distintos.
Sugerencia: dado J, existe a lo sumo una aplicación que preserva el orden de J en E cuya imagen es E o una sección de E.

3. Sean J, E conjuntos bien ordenados y sea $k : J \to E$ que preserva el orden. Entonces el tipo de orden de J es el de E o el de una sección de E.
Sugerencia: elegir $e_0 \in E$ y definir $h : J \to E$ mediante la recursión
$$h(\alpha) = \begin{cases} \min(E \setminus h(S_\alpha)) & \textit{si } h(S_\alpha) \neq E \\ h(\alpha) = e_0 & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

Demostrar que $h(\alpha) \le k(\alpha)$ para todo $\alpha \in J$ y concluir que $h(S_\alpha) \neq E$ para todo $\alpha \in J$.

4. Probar que si A y B son conjuntos bien ordenados, entonces se verifica exactamente una de las siguientes tres condiciones:

   - A y B tienen el mismo tipo de orden;
   - A tiene el tipo de orden de una seccción de B;
   - B tiene el tipo de orden de una sección de A.

   Sugerencia: construir un conjunto bien ordenado que contenga a A y a B y usar el ejercicio anterior

5. Sean X un conjunto y $\mathcal{A}$ la familia de todos los pares $(A, <)$, donde A es un subconjunto de X y $<$ es un buen orden de A. Definimos

   $$(A, <) \prec (A', <')$$

   si $(A, <)$ es igual a una sección de $(A', <')$.

   a) Demostrar que $\prec$ es un orden parcial sobre $\mathcal{A}$.

   b) Sea $\mathcal{B}$ una subfamilia de $\mathcal{A}$ totalmente ordenada por $\prec$. Definimos B' como la unión de los conjuntos B para todo $(B, <) \in \mathcal{B}$; y definimos $<'$ como la unión de las relaciones $<$, para todo $(B, <) \in \mathcal{B}$. Demostrar que $(B', <')$ es un conjunto bien ordenado.

6. Usando los ejercicios 1–5 demostrar el que el principio del máximo es equivalente al teorema del buen orden.

7. Usando los ejercicios 1–5 demostrar que el axioma de elección es equivalente al teorema del buen orden: Sean X un conjunto y c una función de elección fijada para los subconjuntos no vacíos de X. Si T es un subconjunto de X y $<$ es una relación sobre T, decimos que $(T, <)$ es una torre en X si $<$ es un buen orden de T y si para cada $x \in T$

   $$x = c(X - S_x(T))$$

   donde $S_x(T)$ es la sección de T por x.

   a) Sean $(T_1, <_1)$ y $(T_2, <_2)$ dos torres en X. Demostrar que estos dos conjuntos ordenados son el mismo o uno es una sección del otro.
   Sugerencia: suponiendo que $h : T_1 \to T_2$ preserva el orden y $h(T_1)$ es igual a T_2 o a una sección de T_2, probar que $h(x) = x$ para todo $x \in T_1$.

   b) Si $(T, <)$ es una torre en X y $T \neq X$, demostrar que existe una torre en X de la cual $(T, <)$ es una sección.

   c) Sea $\{(T_k, <_k) : k \in K\}$ la familia de todas las torres de X. Sean

   $$T = \bigcup_{k \in K} T_k \qquad \text{y} \qquad < \; = \bigcup_{k \in K} (<_k).$$

   Demostrar que $(T, <)$ es una torre en X. Concluir que $T = X$.