# Topología 2010

Práctica 6 - Homotopía. Grupo fundamental.

---

1. Probar que si $h, h' : X \to Y$ son homotópicas y $k, k' : Y \to Z$ son homotópicas, entonces $kh, k'h' : X \to Z$ son homotópicas.

2. Un espacio $X$ se dice *contráctil* si la identidad $\mathrm{id}_X : X \to X$ es homotópica a una función constante.

   *a*) Probar que si $X \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo, entonces $X$ es contráctil. Concluir que $I$ y $\mathbb{R}$ son contráctiles.

   *b*) Probar que si $X$ es contráctil, entonces $X$ es arcoconexo.

3. Sea $[X, Y]$ el conjunto de clases homotópicas de funciones continuas de $X$ a $Y$.

   *a*) Probar que si $Y$ es contráctil entonces $[X, Y]$ tiene sólo un elemento.

   *b*) Probar que $[*, Y] = \pi_0(Y)$ para todo espacio $Y$.

   *c*) Probar que si $X$ es contráctil e $Y$ arcoconexo, entonces $[X, Y]$ tiene sólo un elemento.

4. Sea $G$ un grupo topológico y sea $X$ un espacio. Probar que $[X, G]$ es un grupo con la operación $[f].[g] = [f.g]$, donde $(f.g)(x) = f(x).g(x)$.

5. Sean $f : X \to Y$ continua y $Z$ otro espacio topológico. Definimos

$$f^* : [Y, Z] \to [X, Z], \quad f^*([g]) = [gf],$$

$$f_* : [Z, X] \to [Z, Y], \quad f_*([h]) = [fh].$$

   *a*) Probar que $f^*$ y $f_*$ están bien definidas.

   *b*) Probar que si $f \cong g$ entonces $f^* = g^*$ y $f_* = g_*$.

   *c*) Deducir que si $f$ es equivalencia homotópica entonces $f^*$ y $f_*$ son biyecciones.

6. Sea $X$ el *peine*, i.e.

$$X = \{(x, y) : x = 0 \text{ ó } x = 1/n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\} \cup \{(x, y) : y = 0\} \subset I^2$$

   con la topología de subespacio. Sea $x_0 = (0, 1) \in X$. Probar que $X$ es contráctil, pero que no existe una homotopía $\mathrm{id}_X \cong c_{x_0}$ que sea relativa a $x_0$.

7. Sea $X$ el espacio que se obtiene al pegar dos copias del peine, identificando el punto $(0, 1)$ de ambas copias. Probar que $X$ no es contráctil.

8. Sea $X$ un espacio topológico y $x_0 \in X$. Sea

$$\Omega X = \{\omega : I \to X \ , \ \omega(0) = \omega(1) = x_0\}$$

con la topología del subespacio de la compacto abierta. Probar que

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_0(\Omega X).$$

9. Sea $X$ espacio topológico, $x_0 \in X$ y sea $s \in S^1$ un punto cualquiera. Sea

$$[(S^1, s), (X, x_0)] = \{[f] / \, f : S^1 \to X \text{ continua tal que } f(s) = x_0\}$$

donde $[f] = [g]$ si $f \simeq_{\{s\}} g$. Probar que $\pi_1(X, x_0) = [(S^1, s), (X, x_0)]$.

10. Sean $x_0, x_1 \in X$ dos puntos en un espacio arcoconexo $X$. Probar que $\pi_1(X, x_0)$ es abeliano si y sólo si para todo par de caminos $x_0 \xrightarrow{\omega,\omega'} x_1$ se tiene $\widehat{\omega} = \widehat{\omega'}$.

11. Sea $A \subset X$ y sea $r : X \to A$ una retracción. Dado $a \in A$, probar que

$$r_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(A, a)$$

es suryectivo.

12. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio, y sea $f : A \to X$ una función continua. Probar que si $f$ se extiende a una función $g : \mathbb{R}^n \to X$, entonces para todo $a \in A$ el morfismo $f_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, f(a))$ es el morfismo cero.

13. Sea $G$ un grupo topológico con multiplicación $\cdot$ y elemento neutro $x_0$. Dados $f, g \in \Omega(G, x_0)$, definamos el lazo $f \odot g$ por $(f \odot g)(s) = f(s) \cdot g(s)$.

    *a*) Mostrar que $\Omega(G, x_0)$ es un grupo con la operación con $\odot$.
    *b*) Mostrar que $\odot$ induce una nueva operación de grupo en $\pi_1(G, x_0)$, que por abuso notaremos $\odot$.
    *c*) Probar que $\odot$ coincide con $\cdot$ en $\pi_1(G, x_0)$.
    *d*) Deducir que $\pi_1(G, x_0)$ es abeliano.