

Topología 2010

Práctica 1 - Espacios topológicos y funciones continuas

1. Sea X un conjunto. Un sistema de **filtros de entornos** consiste en dar para cada $x \in X$ una colección $\emptyset \neq \mathcal{F}_x \subset \mathcal{P}(X)$ satisfaciendo:

E1: $x \in A$ para todo $A \in \mathcal{F}_x$

E2: si $B \subset A$ y $B \in \mathcal{F}_x$, entonces $A \in \mathcal{F}_x$

E3: si $A, B \in \mathcal{F}_x$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}_x$

E4: dado $A \in \mathcal{F}_x$, existe $B \subset A$ tal que $B \in \mathcal{F}_x$ y $B \in \mathcal{F}_y$ para cada $y \in B$

- a) Probar que un sistema de filtros de entornos induce una topología tomando

$$\mathcal{T} = \{B \in \mathcal{P}(X) : B \in \mathcal{F}_x \text{ para todo } x \in B\} \cup \{\emptyset\}$$

- b) Probar que si (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico, los conjuntos

$$\mathcal{F}_x = \{A \in \mathcal{P}(X) : x \in U \subset A \text{ para algún } U \in \mathcal{T}\}$$

verifican los axiomas E1-E4.

- c) Probar que las construcciones de a) y b) son mutuamente inversas.

2. Un **operador clausura** es una función $\overline{(\cdot)} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ tal que:

C1: $\overline{\emptyset} = \emptyset$

C2: $A \subset \overline{A}$ para todo $A \in \mathcal{P}(X)$

C3: $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ para todo $A \in \mathcal{P}(X)$

C4: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ para todos $A, B \in \mathcal{P}(X)$

- a) Probar que un operador clausura $\overline{(\cdot)}$ induce una topología \mathcal{T} en X tomando

$$U \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \overline{X \setminus U} = X \setminus U$$

- b) Probar que una topología \mathcal{T} en X induce un operador clausura tomando

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \supseteq A \\ F \text{ cerrado}}} F$$

- c) Probar que las construcciones de a) y b) son mutuamente inversas.
-

3. Probar que $\bigcap_{\substack{F \supseteq A \\ F \text{ cerrado}}} F = \{x \in X : U \cap A \neq \emptyset \forall x \in U \in \mathcal{T}\}$.

4. Probar las siguientes inclusiones y hallar ejemplos en los que sean estrictas.

$$a) \bigcup_{\alpha} \overline{A_{\alpha}} \subset \overline{\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}}$$

$$b) \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$c) \overline{A \setminus B} \subset \overline{A} \setminus \overline{B}$$

5. Considerar el conjunto $X = [0, 1] \times [0, 1]$ con la topología del orden del diccionario. Determinar la clausura de los siguientes subconjuntos de X .

$$A = \{(1/n, 0) : n \in \mathbb{N}\},$$

$$B = \{(1 - 1/n, 1/2) : n \in \mathbb{N}\},$$

$$C = \{(x, 0) : 0 < x < 1\},$$

$$D = \{(x, 1/2) : 0 < x < 1\},$$

$$E = \{(1/2, y) : 0 < y < 1\}.$$

6. Considerar las siete topologías definidas en el ejercicio 11. Determinar la clausura del conjunto $K = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ en cada una de las topologías.

7. Sea $\{\mathcal{T}_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ una colección de topologías en X . Probar que $\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{T}_{\alpha}$ es una topología en X . ¿Es $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{T}_{\alpha}$ una topología en X ?

8. Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, la **topología generada** por \mathcal{A} es la intersección de todas las topologías que contienen a \mathcal{A} . Probar que esta topología es la menos fina para la cual los elementos de \mathcal{A} son abiertos. Calcular la topología en $X = \{a, b, c, d\}$ generada por $\mathcal{A} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{c\}\}$.

9. Probar que si \mathcal{B} es base de una topología en X , entonces los abiertos de la topología generada por \mathcal{B} son uniones de elementos de \mathcal{B} . Probar que si \mathcal{B} es una sub-base, entonces los abiertos de la topología generada por \mathcal{B} son uniones de intersecciones finitas de elementos de \mathcal{B} .

10. Sea $(X, <)$ un conjunto ordenado. Sea $\mathcal{S} = \{S_x : x \in X\}$ y sea $\mathcal{R} = \{R_x : x \in X\}$, donde $R_x = \{y \in X : x < y\}$. Probar que $\mathcal{S} \cup \mathcal{R}$ es una sub-base para la topología del orden en X .

11. Considerar las siguientes colecciones de subconjuntos de \mathbb{R} :

$$\mathcal{B}_1 = \{(a, b) : a < b\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \{[a, b) : a < b\},$$

$$\mathcal{B}_3 = \{(a, b] : a < b\},$$

$$\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_1 \cup \{B \setminus K : B \in \mathcal{B}_1\}, \text{ donde } K = \{1/n : n \in \mathbb{N}\},$$

$$\mathcal{B}_5 = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{B}_6 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{B}_7 = \{B : \mathbb{R} \setminus B \text{ es finito}\}.$$

- a) Probar que cada \mathcal{B}_i es una base para una topología en \mathbb{R} .
- b) Comparar las siete topologías entre si.
- c) Probar que $\mathcal{B}_5 \cup \mathcal{B}_6$ es una sub-base que genera la misma topología que \mathcal{B}_1 .

12. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Probar que las redes convergentes verifican las siguientes propiedades:

- R1: Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es eventualmente constante, entonces $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a la constante.
- R2: Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a x , entonces toda sub-red de $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a x .
- R3: Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ verifica que toda sub-red tiene una sub-sub-red que converge a x , entonces $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a x .
- R4: Sean Λ un conjunto dirigido, y para cada $\alpha \in \Lambda$ sea Γ_α un conjunto dirigido. Supongamos que para cada $\alpha \in \Lambda$ se tiene una red $(x_k^\alpha)_{k \in \Gamma_\alpha}$ que converge a $x^\alpha \in X$, y que además $(x^\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a $x \in X$. Consideremos $\Phi = \Lambda \times \prod_{\alpha \in \Lambda} \Gamma_\alpha$ ordenado por el orden producto, esto es,

$$(\alpha, (k_\beta)_{\beta \in \Lambda}) \geq (\alpha', (k'_\beta)_{\beta \in \Lambda}) \iff \alpha \geq \alpha' \text{ y } k_\beta \geq k'_\beta \forall \beta \in \Lambda.$$

Entonces la red $(\alpha, (k_\beta)_{\beta \in \Lambda}) \mapsto x_{k_\alpha}^\alpha$ converge a x .

13. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Probar que

$$\overline{A} = \{x \in X : \exists (x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subset A, \text{ y } x_\alpha \rightarrow x\}$$

14. Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es una red, decimos que $x \in X$ es un punto de acumulación de la red si para todo $A \in \mathcal{F}_x$, el conjunto $\{\alpha \in \Lambda : x_\alpha \in A\}$ es cofinal en Λ . Probar que x es un punto de acumulación de la red si y sólo si existe una subred de $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ que converge a x .

15. Sean X, Y espacios topológicos. Probar que cada una de las siguientes condiciones sobre $f : X \rightarrow Y$ es equivalente a pedir que f sea continua

- a) Para todo $x \in X$ y para todo $A \in \mathcal{F}_y$ ($y = f(x)$) existe $B \in \mathcal{F}_x$ tal que $f(B) \subset A$
- b) Para toda red $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subset X$ tal que $x_\alpha \rightarrow x$ se tiene que $f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$
- c) Para todo $A \subset X$ se tiene $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
- d) Si \mathcal{B} es una base para la topología de Y , entonces $f^{-1}(B)$ es abierto en X para todo $B \in \mathcal{B}$.
- e) Si \mathcal{S} es una sub-base para la topología de Y , $f^{-1}(S)$ es abierto en X para todo $S \in \mathcal{S}$.

16. Sean X un espacio topológico y $E \subset X$. Sea $\chi_E : X \rightarrow \mathbb{R}$ la función característica de E , esto es,

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

Probar que χ_E es continua en x si y sólo si x no pertenece a la frontera de E .

17. a) Sean X, Y conjuntos ordenados, con la topología del orden. Probar que si $f : X \rightarrow Y$ es biyectiva y preserva el orden, entonces f es un homeomorfismo.
 b) Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$. Probar que g es un homeomorfismo.
 c) Sea $X = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$ con la topología euclídea. Definimos $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Probar que f es biyectiva y preserva el orden. ¿Es f un homeomorfismo?

18. Sea Y un conjunto ordenado con la topología del orden. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas.

- a) Probar que el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X .
 b) Sea $h : X \rightarrow Y$ la función $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Probar que h es continua.

19. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una colección de subconjuntos del espacio X tal que $X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$. Sea $f : X \rightarrow Y$ y supongamos que $f|_{A_\alpha}$ es continua para cada $\alpha \in \mathcal{A}$.

- a) Probar que si cada A_α es abierto, entonces f es continua.
 b) Probar que si \mathcal{A} es finito y cada conjunto A_α es cerrado, entonces f es continua.
 c) Encontrar un ejemplo donde la colección $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, cada A_α es cerrado, pero f no es continua.
 d) Una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ se dice localmente finita si para cada $x \in X$ existe un abierto $U \subset X$, $x \in U$, tal que $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$ sólo para finitos valores de α . Mostrar que si la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es localmente finita y cada A_α es cerrado, entonces f es continua.

20. Consideremos el anillo de polinomios en n variables sobre un cuerpo k (e.g. $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$),

$$k[x] = k[x_1, \dots, x_n].$$

Para cada subconjunto $S \subset k[x]$ definimos el conjunto algebraico dado por S como

$$V(S) = \{(z_1, \dots, z_n) \in k^n : p(z_1, \dots, z_n) = 0 \forall p \in S\}.$$

Verificar las siguientes propiedades.

- a) $V(S) = V(I_S)$, donde I_S es el ideal generado por S .
- b) Si $S \subset T$, entonces $V(S) \supset V(T)$. $V(\{0\}) = k^n$, y $V(\{1\}) = \emptyset$.
- c) Si $I, J \subset k[x]$ son ideales, entonces $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$.
- d) Si $\{I_a\}_{a \in A}$ es una familia de ideales, entonces $V(\bigcup_{a \in A} I_a) = \bigcap_{a \in A} V(I_a)$.
Los items b), c), d) muestran que los conjuntos algebraicos verifican los axiomas de los cerrados de una topología. Esta es la **topología de Zariski** de k^n .
- e) Los conjuntos $D_f = k^n \setminus V(\{f\})$ forman una base para dicha topología.
- f) Si $f \neq 0$ entonces D_f es denso.
21. Para $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ y para $n = 1, 2$, caracterizar la topología de Zariski en k^n y compararla con la usual.
-

22. Se define en \mathbb{R} la métrica acotada como $\bar{d}(a, b) = \min\{|a-b|, 1\}$. Probar que induce la misma topología que la usual. Sea \mathbb{R}^ω el conjunto de las sucesiones de números reales. Se define en \mathbb{R}^ω la métrica uniforme como $\bar{\rho}((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup_n \{\bar{d}(a_n, b_n)\}$. Verificar que la métrica uniforme es efectivamente una métrica.
23. Decidir si las siguientes funciones $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\omega$ son continuas tomando en \mathbb{R} la topología usual y en \mathbb{R}^ω la topología uniforme.

$$f(t) = (t, 2t, 3t, \dots) \quad g(t) = (t, t, t, \dots) \quad h(t) = (t, \frac{1}{2}t, \frac{1}{3}t, \dots)$$

24. Decidir si las siguientes sucesiones convergen en \mathbb{R}^ω con la topología uniforme.

- a) $(1, 1, 1, 1, \dots), (0, 2, 2, 2, \dots), (0, 0, 3, 3, \dots), \dots$
- b) $(1, 1, 1, 1, \dots), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots), (0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots), \dots$
- c) $(1, 0, 0, 0, \dots), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \dots), \dots$
- d) $(1, 1, 0, 0, \dots), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \dots), \dots$

25. Calcular la clausura del conjunto de las sucesiones eventualmente cero con respecto a la topología uniforme.

26. Dados $x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\omega$ y $0 < \epsilon < 1$, sea

$$U(x, \epsilon) = (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon) \times \dots \times (x_n - \epsilon, x_n + \epsilon) \dots$$

- a) Pruebe que $U(x, \epsilon)$ no es igual a la bola $B_{\bar{\rho}}(x, \epsilon)$, y que ni siquiera es un abierto.
- b) Pruebe que $B_{\bar{\rho}}(x, \epsilon) = \bigcup_{\delta < \epsilon} U(x, \delta)$.
27. Sean $(a_1, a_2, \dots), (b_1, b_2, \dots) \in \mathbb{R}^\omega$ dos sucesiones tales que $a_i \neq 0$ para todo i . Definamos $h : \mathbb{R}^\omega \rightarrow \mathbb{R}^\omega$ por la fórmula

$$h((x_1, x_2, \dots)) = (a_1 x_1 + b_1, a_2 x_2 + b_2, \dots),$$

Dar condiciones sobre los números a_i, b_i para que h sea continua. ¿Y para que h sea un homeomorfismo?