Práctica 1

Introducción

1. Extensión y unicidad de medidas

1. **Teorema de Extensión de Caratheodory-Hahn**. Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ un álgebra de conjuntos y sea μ una medida sobre $\mathcal{A}$. Pruebe que μ admite extensión sobre $\sigma(\mathcal{A})$.

2. Sea en $\mathbb{R}$ la clase $\mathcal{I}$ de intervalos definida por

$$\mathcal{I} = \{I : I \text{ es de la forma } \emptyset\,,\ (-\infty, a]\,,\ (b, c]\,,\ (d, +\infty) \text{ ó } \mathbb{R} \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

   Demuestre que la clase $\mathcal{A}$ formada por finitas uniones disjuntas de elementos de $\mathcal{I}$ constituye un álgebra.

3. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de conjuntos. Sean $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ y $\sigma(\mathcal{A})$ la clase monótona y σ-álgebra generadas por $\mathcal{A}$ respectivamente. Muestre que

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}).$$

4. Sea $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}))$ un espacio medible donde $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ y sean ν y μ dos medidas finitas definidas sobre $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}))$ que coinciden sobre $\mathcal{A}$. Demuestre que si $\mathcal{A}$ es un álgebra entonces ν y μ coinciden sobre $\sigma(\mathcal{A})$. Deduzca que en el Teorema de Extensión de Caratheodory-Hahn la extensión resulta única si la medida μ es σ-finita.

5. Mostrar con un ejemplo que en el Teorema de Extensión de Caratheodory-Hahn la extensión puede no ser única si la medida μ *no* es σ-finita.

2. Teorema $\pi - \lambda$ de Dynkin

Definición. Sea Ω un conjunto y sea $\mathcal{P}$ una clase de subconjuntos de Ω. Decimos que $\mathcal{P}$ es un π-*sistema* si es cerrada por intersecciones finitas.

Definición. Sea Ω un conjunto y sea $\mathcal{D}$ una clase de subconjuntos de Ω. Decimos que $\mathcal{D}$ es un λ-*sistema* si verifica las siguientes condiciones:

(a) $\Omega \in \mathcal{D}$

(b) $A \in \mathcal{D} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{D}$

(c) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}$ y $A_n \cap \mathcal{A}_m = \emptyset$ si $n \neq m \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

1. Verificar que la condición (b) en la definición de λ-sistema puede ser sustituida por la condición

$$(b')\ \ A, B \in \mathcal{D} \text{ y } A \subseteq B \Longrightarrow B \setminus A \in \mathcal{D}.$$

2. Probar que una clase $\mathcal{C}$ que es un π-sistema y un λ-sistema a la vez resulta una σ-álgebra.

3. **Teorema de Dynkin**. Sean $\mathcal{P}$ un π-sistema y $\mathcal{D}$ un λ-sistema. Mostrar que si $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{D}$ entonces $\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{D}$.

4. Sea $(\Omega, \sigma(\mathcal{P}))$ un espacio medible donde $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ y sean ν y μ dos medidas finitas definidas sobre $(\Omega, \sigma(\mathcal{P}))$ tales que coinciden sobre $\mathcal{P}$ y $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$. Demuestre que si $\mathcal{P}$ es un π-sistema entonces ν y μ coinciden sobre $\sigma(\mathcal{P})$.

3. Funciones de distribución y medidas inducidas

1. Sean $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ dos espacios medibles y sea P una probabilidad en $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$. Dada una función medible $X : \Omega_1 \to \Omega_2$ para $A \in \mathcal{F}_2$ definimos

$$P_X(A) := P(X^{-1}(A)).$$

   a) Demuestre que P_X es una probabilidad en $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$.

   b) Dada una función $f : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ medible probar que

$$f \;\; P_X\text{-integrable} \Longleftrightarrow f(X) \;\; P\text{-integrable}$$

   y que además en este caso vale la igualdad

$$\int_{\Omega_2} f \, dP_X \;=\; \int_{\Omega_1} f(X) \, dP \,.$$

   Comentario. En el caso en que $X : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}^d$ sea una variable aleatoria, la medida de probabilidad P_X inducida sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ recibe el nombre de *ley* o *distribución* de X.

2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $Y : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ una variable aleatoria con $\int_\Omega Y \, dP = 1$. Definimos para $A \in \mathcal{F}$

$$\mu_Y(A) := \int_A Y \, dP$$

   a) Demuestre que μ_Y es una probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$.

   b) Si f es μ_Y-integrable obtenga una expresión para $\int_\Omega f \, d\mu_Y$ en términos de la probabilidad original.

3. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, X una variable aleatoria definida sobre este espacio y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible Borel. Mostrar que

   a) Si X es una variable aleatoria discreta y $g(X)$ es P-integrable entonces

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in R_X} g(x) P(X = x)$$

b) Si X es una variable aleatoria absolutamente continua con densidad f_X y $g(X)$ es P-integrable entonces

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x)\, dx.$$

4. Muestre que dada una función de distribución F existe una variable aleatoria X que tiene a F como función de distribución acumulada asociada (i.e. $F_X = F$). Más aun, muestre que esta variable aleatoria es única en el sentido de que cualquier par de variables aleatorias con esta propiedad tienen la misma distribución.

5. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sea X una variable aleatoria definida sobre este espacio. Pruebe que

$$F_X \text{ absolutamente continua} \Longleftrightarrow P_X \ll \mathcal{L}$$

donde $\mathcal{L}$ denota la medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Muestre que en este caso la derivada de la función de distribución acumulada F_X' coincide con la derivada de Radon-Nykodym $\frac{dP_X}{d\mathcal{L}}$. Ésta recibe el nombre de *densidad* de X.

6. Muestre que existe una variable aleatoria continua que *no* es absolutamente continua. Es decir, construir un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ en donde se tenga definida una variable aleatoria X con función de distribución continua pero no absolutamente continua.

4. Medida producto

1. Sean $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ dos espacios medibles. En el producto cartesiano $\Omega_1 \times \Omega_2$ sea la clase $\mathcal{R}$ de rectángulos

$$\mathcal{R} = \{A \times B : A \in \mathcal{F}_1\, ,\, B \in \mathcal{F}_2\}.$$

Demuestre que la clase $\mathcal{A}$ formada por finitas uniones disjuntas de elementos de $\mathcal{R}$ constituye un álgebra.

Definición. Sean $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ dos espacios medibles y sea $\mathcal{R}$ la clase de subconjuntos de $\Omega_1 \times \Omega_2$ del ejercicio anterior. Definimos la *σ-álgebra producto* como la menor σ-álgebra que contiene a $\mathcal{R}$. La denotaremos por $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$.

2. Sean $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ dos espacios medibles y sea $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ la σ-álgebra producto. Demuestre que para todo $A \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ las secciones

$$A_{\omega_1} := \{\omega_2 \in \Omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in A\}$$

$$A_{\omega_2} := \{\omega_1 \in \Omega_1 : (\omega_1, \omega_2) \in A\}$$

son medibles y que además vale

$$P(A) = \int P_1(A_{\omega_2})\, dP_2 = \int P_2(A_{\omega_1})\, dP_1$$

5. Funciones medibles y espacios producto

1. Demuestre que las siguientes σ-álgebras coinciden en $\mathbb{R}^k$. Los conjuntos pertenecientes a éstas reciben el nombre de *borelianos* de $\mathbb{R}^k$.

   a) $\mathcal{F}_1 = \sigma\Big(\ B(x,r) : x \in \mathbb{R}^k \, , \, r > 0 \ \Big)$

   b) $\mathcal{F}_2 = \sigma\Big(\ G : G \text{ abierto en } \mathbb{R}^k \Big)$

   c) $\mathcal{F}_3 = \sigma\Big(B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_k : B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Big)$

   d) $\mathcal{F}_4 = \sigma\Big(\pi_i : 1 \leq i \leq k \Big)$

   e) $\mathcal{F}_5 = \sigma\Big((a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \ldots \times (a_k, b_k] \, , a_i \leq b_i \, , a_i, b_i \in \mathbb{R} \Big)$

   f) $\mathcal{F}_6 = \sigma\Big((-\infty, a_1] \times (-\infty, a_2] \times \ldots \times (-\infty, a_k] \, , a_i \in \mathbb{R} \Big)$

   Aquí $\pi_i : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ denota la i-ésima proyección canónica.

2. Mostrar con un ejemplo que si $(\Lambda, \mathcal{J})$ es un espacio topológico y β es una base para la topología $\mathcal{J}$ entonces no necesariamente vale $\sigma(\mathcal{J}) = \sigma(\beta)$. ¿Qué condición es suficiente para que valga la igualdad?

3. Mostrar con un ejemplo que si $(\Lambda_1, \mathcal{J}_1)$ y $(\Lambda_2, \mathcal{J}_2)$ son espacios topológicos y si $(\Lambda_1 \times \Lambda_2, \mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2)$ es el espacio producto equipado con la topología producto entonces no necesariamente vale $\sigma(\mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2) = \sigma(\mathcal{J}_1) \otimes \sigma(\mathcal{J}_2)$. ¿Vale la inclusión en algún sentido? ¿Qué condición es suficiente para que valga la igualdad?

   Comentario. Los ejercicios 2 y 3 muestran que para un espacio topológico arbitrario no necesariamente vale las igualdad entre las σ-álgebras que figuran en el ejercicio 1. Por este motivo debemos tener cuidado a la hora de definir la clase de los borealianos en un espacio topológico cualquiera. Entenderemos por los *borelianos* de un espacio topológico $(\Lambda, \mathcal{J})$ a los elementos de $\sigma(\mathcal{J})$, la σ-álgebra generada por los abiertos de Λ.

4. Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible y sea $\tilde{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^k$ una función. Demuestre que $\tilde{X}$ es un vector aleatorio (i.e. $\tilde{X}$ es función medible si se considera a $\mathbb{R}^k$ con la σ-álgebra de los borelianos) si y sólo si cada una de las coordenadas X_i es una variable aleatoria.

5. Sea $\{(\Omega_k, \mathcal{F}_k)\}_{k=1}^n$ una familia de espacios medibles. Definimos la σ-álgebra producto $\otimes_{k=1}^n \mathcal{F}_k$ para $n \geq 3$ de manera inductiva como

   $$\otimes_{k=1}^n \mathcal{F}_k := \Big(\otimes_{k=1}^{n-1} \mathcal{F}_k \Big) \otimes \mathcal{F}_n.$$

   Sean además para cada $1 \leq i \leq n$ las proyecciones canónicas

   $$\pi_i : \prod_{k=1}^n \Omega_k \longrightarrow \Omega_i.$$

Probar que $\otimes_{k=1}^{n}\mathcal{F}_k$ es la menor σ-álgebra sobre el espacio producto $\prod_{k=1}^{n}\Omega_k$ para la cual las proyecciones canónicas resultan funciones medibles. Deducir que si $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$ es otro espacio medible y se tiene una función

$$f : \Omega_0 \longrightarrow \prod_{k=1}^{n}\Omega_k$$

entonces

$$f \quad \otimes_{k=1}^{n} \mathcal{F}_k\text{-medible} \iff \pi_i \circ f \quad \mathcal{F}_i\text{-medible } \forall\ 1 \leq i \leq n.$$

Es decir, la función f vista como vector es medible si y sólo si cada una de sus coordenadas es medible. Notar que esta es la versión general del ejercicio 4.

6. Sean Ω_1 un conjunto, $(\Omega_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ una familia de espacios medibles y $X_\alpha : \Omega_1 \to \Omega_\alpha$ una función para cada $\alpha \in \Gamma$. Sea $\mathcal{G} = \sigma(X_\alpha : \alpha \in \Gamma)$ la menor σ-álgebra sobre Ω_1 para la cual las funciones X_α resultan medibles. Sean además $(\Omega, \mathcal{F})$ otro espacio medible y una función $Y : \Omega \to \Omega_1$. Demuestre que Y es $\mathcal{G}$-medible si y sólo si $X_\alpha \circ Y$ es $\mathcal{F}_\alpha$-medible para todo $\alpha \in \Gamma$. Relacionar con el ejercicio anterior.

6. Independencia

Definición Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Se tienen las siguientes nociones de independencia:

(i) Los eventos A y B se dicen independientes si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

(ii) Una colección de eventos $A_1, \ldots, A_n$ se dice mutuamente independientes si

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_h}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_h})$$

para todo $h \leq n$, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_h \leq n$.

En general, dada una familia arbitraria de eventos $(A_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ diremos que son independientes si para cualquier subconjunto finito $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ con $k \geq 2$ los eventos $A_{\alpha_1}, \cdots, A_{\alpha_k}$ son independientes.

(iii) Una colección $\{\mathcal{H}_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ de clases de conjuntos medibles ($\mathcal{H}_\alpha \subset \mathcal{F}\ \forall\ \alpha \in \Gamma$) se dice independiente si $(H_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ son eventos independientes para toda posible elección de $H_\alpha \in \mathcal{H}_\alpha$.

(iv) Dos variables aleatorias $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ se dicen independientes si para cualquier par de eventos $A, B \in \mathcal{B}^1$ se tiene que $X^{-1}(A)$ y $Y^{-1}(B)$ son independientes. Es decir

$$P(X \in A\ , Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

para todo $A, B \in \mathcal{B}^1$.

(v) Las variables aleatorias $X_1, \dots, X_n$ se dicen independientes si para toda elección de eventos $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}^1$ se tiene que $X_1^{-1}(A_1), \dots, X_n^{-1}(A_n)$ son independientes.

Puede demostrase que esta definición es equivalente a pedir que

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in A_i\}\Big) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i)$$

para todo $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}^1$.

En general, dada una familia arbitraria de variables aleatorias $(X_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$, diremos que son independientes si para cualquier subconjunto finito $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ las variables aleatorias X_{α_i} son independientes.

Una manera equivalente de definir independencia de variables aleatorias es pedir que las σ-álgebras generadas resulten familias independientes.

(vi) La variable aleatoria X se dice independiente de la σ-álgebra $\mathcal{F}$ si $\sigma(X)$ resulta independiente de $\mathcal{F}$. Equivalentemente, podemos pedir que χ_A resulte independiente de X para todo conjunto $A \in \mathcal{F}$, donde χ_A denota la indicadora del conjunto A.

(vii) Dos familias de variables aleatorias $(X_i)_{i\in I}$ e $(Y_j)_{j\in J}$ se dicen independientes si $\sigma(X_i : i \in I)$ es independiente de $\sigma(Y_j : j \in J)$.

1. Probar que si A y B son eventos independientes en un espacio de probabilidad entonces también lo son A^c y B. Idem para A^c y B^c.

2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sean $X, Y\colon \Omega \to \mathbb{R}$ variables aleatorias. Son equivalentes:

   a) Las variables aleatorias X e Y son independientes.

   b) Los eventos $\{X \le a\}$ e $\{Y \le b\}$ son independientes para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

   c) $F_{XY} = F_X F_Y$.

   d) La probabilidad P_{XY} inducida por el vector aleatorio (X, Y) en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2)$ es una medida producto. ¿De qué medidas es el producto?

   e) En el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2, P_{XY})$ las proyecciones canónicas π_1 y π_2 son variables aleatorias independientes.

   Si las variables X e Y son independientes lo notaremos $X \perp Y$.

3. a) Mostrar que si X y Y son variables aleatorias discretas

   $$X \perp Y \iff p_{XY} = p_X p_Y.$$

   b) Mostrar que si X y Y son variables aleatorias absolutamente continuas

   $$X \perp Y \iff f_{XY} = f_X f_Y.$$

4. ¿Es cierto que si X e Y son variables aleatorias absolutamente continuas entonces que el vector (X, Y) también lo es? Relacionar con el ejercicio anterior.

   Nota. Decimos que (X, Y) es absolutamente continuo si la medida de probabilidad conjunta P_{XY} es absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$.

5. Pruebe que si X e Y son variables aleatorias independientes y f y g son funciones medibles Borel tales que $\max\{\mathbb{E}[f(X)^2], \mathbb{E}[g(Y)^2]\} < +\infty$ entonces

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)].$$