

Práctica 5

Martingalas a tiempo discreto

1. Tiempos de Parada

A lo largo de esta sección vamos a fijar un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ junto con una filtración $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida en este espacio.

Definición. Una variable aleatoria $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup +\infty$ se dice un *tiempo de parada* con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si para todo $n \in \mathbb{N}$ el evento $\{\tau \leq n\}$ pertenece a $\mathcal{F}_n$.

1. Mostrar que τ es un tiempo de parada si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$ el evento $\{\tau = n\}$ pertenece a $\mathcal{F}_n$.
2. Mostrar que $\tau_m \equiv m$ es un tiempo de parada para todo $m \in \mathbb{N}$.
3. Mostrar que si $k \in \mathbb{N}$ y τ es un tiempo de parada entonces $\tau + k$ también lo es.
4. Mostrar que si τ y ρ son tiempos de parada entonces $\tau \wedge \rho$, $\tau \vee \rho$ y $\tau + \rho$ también lo son.
5. Mostrar que si $(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de tiempos de parada entonces $\sup_{k \in \mathbb{N}} \tau_k$ también lo es.
6. Mostrar que todo tiempo de parada es límite puntual de tiempos de parada acotados.
7. Probar que si τ es un tiempo de parada finito y $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es un proceso estocástico entonces X_τ es una variable aleatoria.

Definición. Sea τ un tiempo de parada para la filtración $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Definimos la clase

$$\mathcal{F}_\tau := \left\{ A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

1. Mostrar que $\mathcal{F}_\tau$ es una σ -álgebra y que τ es $\mathcal{F}_\tau$ -medible. ¿Es cierto que $\sigma(\tau) = \mathcal{F}_\tau$?
2. Mostrar que $A \in \mathcal{F}_\tau$ si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$ el evento $A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$.
3. Probar que si τ_1 y τ_2 son tiempos de parada entonces para todo $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$ se tiene $A \cap \{\tau_1 \leq \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_2}$. Deducir que si $\tau_1 \leq \tau_2$ en Ω entonces $\mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_2}$.
4. Probar que si τ_1 y τ_2 son tiempos de parada entonces $\mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} = \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$ y que los conjuntos

$$\{\tau_1 < \tau_2\}, \{\tau_2 < \tau_1\}, \{\tau_1 \leq \tau_2\}, \{\tau_2 \leq \tau_1\} \text{ y } \{\tau_1 = \tau_2\}$$

pertenecen a $\mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2}$.

5. Sea τ_0 un tiempo de parada y sea $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ una variable aleatoria tal que $\tau_0 \leq \tau$ en Ω . Mostrar que si τ es $\mathcal{F}_{\tau_0}$ -medible entonces es un tiempo de parada.
6. Sean τ_1 y τ_2 tiempos de parada y sea Z una variable aleatoria integrable. Probar que
 - a) $\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_{\tau_1}) = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2})$ en casi todo punto de $\{\tau_1 \leq \tau_2\}$.
 - b) $\mathbb{E}[\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_{\tau_1})|\mathcal{F}_{\tau_2}] = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2})$.

2. Generalidades

1. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un proceso integrable a valores en un conjunto numerable $E \subset \mathbb{R}$. Mostrar que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una martingala con respecto a su filtración natural si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$ y toda elección de estados $i_1, \dots, i_n \in E$ que verifique $P(X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) > 0$ se tiene que $\mathbb{E}(X_{n+1}|X_1 = i_0, \dots, X_n = i_n) = i_n$.
2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Probar que la familia

$$\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) : \mathcal{G} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra contenida en } \mathcal{F}\}$$

es uniformemente integrable.

3. Mostrar la desigualdad maximal para $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una supermartingala no negativa. Esto es, dado $a > 0$ se tiene la siguiente desigualdad

$$aP\left(\max_{0 \leq k \leq n} X_k \geq a\right) \leq \mathbb{E}(X_0).$$

4. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una martingala uniformemente integrable y sean τ_1 y τ_2 tiempos de parada tales que $\tau_1 \leq \tau_2 < +\infty$ en Ω .
 - a) Probar que X_{τ_1} y X_{τ_2} son variables aleatorias integrables.
 - b) Probar que $\mathbb{E}(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}) = X_{\tau_1}$.
 - c) Mostrar que la hipótesis de integrabilidad uniforme es innecesaria para probar los dos items anteriores si los tiempos de parada son acotados.
5. Sean $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una martingala y $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $\mathbb{E}(|\phi(X_n)|) < +\infty$. Probar que $(\phi(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es una submartingala.
6. Sea T un tiempo de parada con respecto a una filtración $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que para algún $N \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ satisface

$$P(T \leq N + n | \mathcal{F}_n) \geq \varepsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostrar que $\mathbb{E}(T) < +\infty$.

3. Convergencia de Martingalas

1. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. definidas sobre un mismo espacio de probabilidad con

$$P(X_1 = 0) = P(X_1 = 2) = \frac{1}{2}.$$

Sea

$$Y_n = \prod_{i=1}^n X_i.$$

Probar que Y_n es una martingala para la filtración generada y que incluso tiene límite en casi todo punto pero que no existe variable aleatoria Y tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $Y_n = E(Y|\mathcal{F}_n)$. ¿Puede ser uniformemente integrable $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

2. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución dada por

$$P(X_n = -n^2) = \frac{1}{n^2} \quad \text{y} \quad P\left(X_n = \frac{n^2}{n^2 - 1}\right) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Sea $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Mostrar que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 1$ en casi todo punto. Deducir que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una martingala que converge a $+\infty$. ¿Es uniformemente integrable?

3. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ una martingala en L^2 .

- a) Mostrar que los incrementos $(X_{n+1} - X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ son ortogonales.
- b) Concluir que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una martingala acotada en L^2 si y sólo si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2] < +\infty.$$

- c) Mostrar que toda martingala acotada en L^2 tiene límite en este espacio sin apelar al teorema de convergencia de martingalas.

4. Consideremos el espacio de probabilidad $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), P)$ donde P es la medida de Lebesgue. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$\mathcal{F}_n := \sigma\left(\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right] : j = 0, \dots, 2^n - 1\right)$$

y definamos las variables aleatorias X_n según la fórmula

$$X_n = 2^n \mathbb{1}_{[0, 2^{-n}]}$$

Observar que el proceso definido corresponde a la estrategia “ganadora” de doblar la apuesta hasta recuperar las pérdidas. ¿Le resulta similar a algún otro modelo de esta práctica?

- a) Probar que X_n es una martingala respecto a la filtración $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- b) Calcular $\mathbb{E}(X_n)$ y $\mathbb{E}(\max_{1 \leq k \leq n} X_k)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- c) Concluir que no existe $C > 0$ tal que $\mathbb{E}(\max_{1 \leq k \leq n} X_k) \leq C \mathbb{E}(X_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que, por lo tanto, la desigualdad de Doob no puede valer para $p = 1$.