Práctica 6

Cadenas de Markov

Aclaración. Todas las cadenas de Markov consideradas en esta práctica son homogéneas a excepción del primer ejercicio de la sección *Generalidades*.

1. Generalidades

1. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ un proceso estocástico a valores en un espacio de estados $\mathcal{S}$ a lo sumo numerable y sea $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ a la filtración natural asociada. Para $k \in \mathbb{N}$ utilizaremos la notación $X^{(k)}$ para hacer referencia a la sucesión $(X_{n+k})_{n\in\mathbb{N}_0}$.

   a) Demostrar que X es una cadena de Markov si y sólo si
   $$P(A|\mathcal{F}_n) = P(A|X_n)$$
   para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y $A \in \mathcal{G}_{n+1} = \sigma(X_m : m \geq n+1)$.

   b) Concluir que X es una cadena de Markov si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}_0$ los vectores $X^{(n+1)}$ y $(X_k)_{0\leq k\leq n-1}$ son independientes dada $\sigma(X_n)$.

   c) Demostrar que X es una cadena de Markov homogénea si y sólo si
   $$P(X^{(n+1)} \in B|\mathcal{F}_n) = P_{X_n}(X \in B)$$
   para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

   d) Concluir que X es una cadena de Markov homogénea si y sólo si
   $$P(X^{(n+1)} \in B|X_n = i_n, \ldots, X_1 = i_1) = P_{i_n}(X \in B)$$
   para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ y elección de estados $i_1, \ldots, i_n \in \mathcal{S}$ tal que valga $P(X_n = i_n, \ldots, X_1 = i_1) > 0$.

   e) Mostrar que X es una cadena de Markov homogénea si y sólo si
   $$\mathbb{E}(f(X^{(n+1)})|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}_{X_n}(f(X))$$
   para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y $f : \mathcal{S}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ medible no negativa o acotada.

2. Comparar la definición de cadena de Markov con la de martingala. ¿En qué se parecen? ¿En qué difieren? Buscar ejemplos de cadenas de Markov que no sean martingalas y viceversa.

3. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov. Probar que para cada $k \in \mathbb{N}$ el proceso Y^k definido por $Y_n^k := X_{kn}$ es una cadena de Markov. ¿Cuál es su matriz de transición?

4. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov y, fijado $p \in (0,1)$, sea $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes entre sí y de X, cada una con distribución geométrica de parámetro p. Definamos $S_n := \sum_{i=1}^n T_i$ y $Z_n := X_{S_n}$. Probar que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una cadena de Markov y hallar su matriz de transición.

5. Fijemos $p > 0$ y sea $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución Bernoulli de parámetro p. Definimos $S_0 := 0$ y $S_n := \sum_{i=1}^n Z_i$ para $n \in \mathbb{N}$. En cada uno de los siguientes casos determinar si el proceso $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una cadena de Markov. En caso afirmativo, exhibir su matriz de transición y, de lo contrario, mostrar un ejemplo en donde $P(X_{n+1} = i|X_n = j, X_{n-1} = k)$ no sea independiente de k.

   a) $X_n = Z_n$
   b) $X_n = S_n$
   c) $X_n = \sum_{i=1}^n S_i$
   d) $X_n = (S_n, \sum_{i=1}^n S_i)$

6. Sean $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución geométrica y X_0 una variable aleatoria a valores en $\mathbb{N}$ independiente de $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Definimos $X_n := \text{máx}\{X_0, \ldots, Z_n\}$ para $n \in \mathbb{N}$.

   a) Mostrar que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una cadena de Markov y dar su matriz de transición.
   b) ¿Existe una distribución invariante para esta cadena?
   c) ¿Es cierto que si $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es solamente una cadena de Markov entonces $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ también lo es?

7. Sea P una matriz estocástica y μ una medida invariante para P. Mostrar que para todo $j \in \mathbb{N}$ y todo $k \geq 1$ se verifica

$$\mu(j) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(i) P_{ij}^k.$$

   Deducir que si P es irreducible entonces $\mu(j) > 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

8. Sea P una matriz estocástica. Mostrar que

   a) Si las columnas de P suman uno entonces la medida de contar es invariante para P.
   b) Si P es simétrica entonces la medida de contar es reversible para P.
   c) Puede no existir una medida de probabilidad invariante para P a pesar de que se cumpla alguna de las condiciones en los items anteriores.
   d) Si el espacio de estados es finito entonces podemos reemplazar a la medida de contar por la medida de probabilidad uniforme en los dos primeros items.

9. Probar que toda cadena de Markov en espacio de estados finito tiene al menos una clase comunicante cerrada. Mostrar un ejemplo de una cadena de Markov sin ninguna clase comunicante.

10. Mostrar que si una cadena de Markov es irreducible y tiene un estado s_i con $P(s_i, s_i) > 0$ entonces es también aperiódica.

11. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una cadena de Markov en el espacio de estados $\mathcal{S}$ y con probabilidad reversible π. Probar que para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y elección de estados $i_0, \ldots, \imath_k \in \mathcal{S}$ se tiene

$$P_\pi(X_0 = i_0, \ldots, X_k = i_k) = P_\pi(X_0 = i_k, \ldots, X_k = i_0).$$

2. Propiedad fuerte de Markov

1. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S}$ y τ un tiempo de parada con respecto a la filtración natural $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Probar que para toda $f : \mathcal{S}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ medible no negativa o acotada se tiene

$$\mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\{\tau<+\infty\}} f(X^{(\tau+1)})\Big|\mathcal{F}_\tau\Big] = \mathbb{1}_{\{\tau<+\infty\}}\mathbb{E}_{X_\tau}(f(X))$$

donde $X^{(\tau+1)} = (X_{\tau+n})_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S}$. Dado un estado $i \in \mathcal{S}$ definimos recursivamente los tiempos de parada

$$T_i^0 \equiv 0 \qquad \text{y} \qquad T_i^{k+1} = \text{ínf}\{n > T_i^k : X_n = i\}$$

para $k \in \mathbb{N}_0$. Probar que si $i \in \mathcal{S}$ es tal que $P(T_i^k < +\infty) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ entonces las variables aleatorias $(T_i^{k+1} - T_i^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ son independientes e idénticamente distribuidas.

3. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S}$. Dados dos estados $i, j \in \mathcal{S}$ definimos $\rho_{ij} := P_i(T_j < +\infty)$ donde T^j es el tiempo de parada del ejercicio anterior. Un estado $i \in S$ se dice *recurrente* si $\rho_{ii} = 1$. Un estado que no es recurrente se denomina *transitorio*.

   a) Probar que para todo par de estados $P_i(T_j^n < +\infty) = \rho_{ij}\rho_{jj}^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   b) Deducir que un estado $i \in \mathcal{S}$ es recurrente si y sólo si $P_i(T_i^n < +\infty) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   c) Para $i \in \mathcal{S}$ sea la variable $N_i = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=i\}}$ que representa el número de veces que la cadena visita al estado i. Probar que para $i, j \in \mathcal{S}$ se tiene

$$P_j(N_i = k) = \begin{cases} \rho_{ji}\rho_{ii}^{k-1}(1-\rho_{ii}) & \text{si } k \geq 1 \\ 1 - \rho_{ji} & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

   d) Concluir que un estado $i \in \mathcal{S}$ es recurrente si y sólo si $\mathbb{E}_i(N_i) = +\infty$. En caso de ser recurrente mostrar que vale incluso $P_i(N_i = +\infty) = 1$.

4. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S}$ y estado recurrente i. Consideremos las excursiones realizadas por la cadena entre dos visitas sucesivas al estado i, i.e., para cada $k \in \mathbb{N}_0$ definimos

$$\mathcal{E}_k := (X_{T_i^k+1}, \ldots, X_{T_i^{k+1}}).$$

   a) Mostrar que $\mathcal{E}_k$ es una variable aleatoria a valores en $\bigcup_{n\geq 2} \mathcal{S}^n$.

   b) Mostrar que bajo P_i las variables aleatorias $(\mathcal{E}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ son independientes e idénticamente distribuidas con distribución dada por

$$P_i(\mathcal{E}_k = u) = p(i, i_1) \ldots p(i_n, 1)$$

   siendo $u = (i_1, \ldots, i_n, i)$.

3. Algunos ejemplos de Cadenas de Markov

1. Considerar la cadena de Markov (X_n) en espacio de estados $\mathcal{S} = \{s_1, s_2\}$ con matriz de transición dada por
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
   a) Representar el grafo de transiciones y describir las clases comunicantes.
   b) Probar que la cadena no es irreducible a pesar de que s_1 conduce a s_2.
   c) ¿Qué ocurre con X_n cuando $n \to \infty$?

2. Identificar las clases comunicantes de la matriz de transición
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$
   ¿Cuáles de estas clases son cerradas?

3. **El ajedrez como cadena de Markov**.
   a) Considerar un tablero de ajedrez en donde se tiene una única pieza, un rey, que ejecuta al azar un movimiento dentro de los que tiene permitidos. Mostrar que la posición del rey a tiempo n es una cadena de Markov. ¿Cuál es el espacio de estados? ¿Es irreducible esta cadena? ¿Es aperiódica?
   b) Responder las mismas preguntas pero si se cambia al rey por un alfil.
   c) Responder las mismas preguntas pero si se cambia al rey por un caballo.

4. **Paseo al azar orientado en el toro**. Sean $a, b \in \mathbb{N}$ y consideremos la cadena de Markov con espacio de estados
$$S = \{(x, y) \colon x \in \{0, ..., a-1\}, y \in \{0, ..., b-1\}\}$$
   y el siguiente mecanismo de transición: si la cadena se encuentra en el estado (x, y) en el instante n, entonces en el próximo paso visita los estados $((x+1) \bmod a, y)$ y $(x, (y+1) \bmod b)$, cada uno con probabilidad $1/2$.
   a) Mostrar que la cadena es irreducible.
   b) Mostrar que es aperiódica si y sólo si a y b son coprimos.

5. **Funciones de cadenas de Markov**. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, s_3\}$, distribución inicial $\mu = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ y matriz de transición
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
   Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ definimos $Y_n = \mathbb{1}_{\{X_n \neq s_1\}}$. Mostrar que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ *no* es una cadena de Markov.

4. Una ventana a la mecánica estadística

1. **Urna de Ehrenfest**. Consideremos el paseo al azar en el hipercubo $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ donde $p \in [0,1]$ es la probabilidad de no cambiar de estado entre dos instantes consecutivos de tiempo. Probar que para todo p la medida uniforme es reversible para esta cadena. Probar que para todo p es irreducible. ¿Para qué valores de p es aperiódica?

2. Para el paseo al azar en el hipercubo del ejercicio anterior y $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$Z_n := \text{cantidad de coordenadas en } 1 = \sum_{i=1}^{N} X_n(i).$$

   Probar que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una cadena de Markov y hallar la matriz de transición. ¿Es irreducible? ¿Es aperiódica? ¿Es reversible?

3. **Model de Bernoulii (1769) - Laplace (1812)**. Se tienen dos urnas A y B con N bolillas blancas y N bolillas negras. Un *intercambio* consiste en tomar una bolilla al azar de la urna A y una de la urna B y cambiarlas de urna. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea X_n la cantidad de bolillas negras en la urna A después de n intercambios. Probar que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una cadena de Markov y hallar su matriz de transición. ¿Es irreducible? ¿Es aperiódica? Hallar una (la) distribución estacionaria. ¿Es reversible esta distribución estacionaria?[1]

4. Para los procesos definidos en los ejercicios 1 y 3 calcular $\mathbb{E}(X_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos una entropía para estos modelos como una función de la esperanza dada por $\phi(\mathbb{E}(X_n)) = -|\mathbb{E}(X_n) - \frac{N}{2}|$. Probar que $\phi(\mathbb{E}(X_{n+1})) = (1 - \frac{2}{N})\phi(\mathbb{E}(X_n))$ y que, por lo tanto, la entropía crece. ¿Es compatible esto con el hecho de que los procesos son reversibles?

5. **Proceso de ramificación con inmigraciones** (Marian Smoluchowski [1914]). Sean $(\xi_n^i)_{i,n\in\mathbb{N}}$ y $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones independientes de variables aleatorias i.i.d. Consideremos el proceso de ramificación[2] con inmigraciones definido por $Z_0 := 1$ y para $n \in \mathbb{N}_0$

$$Z_{n+1} := \xi_{n+1}^1 + \cdots + \xi_{n+1}^{Z_n} + I_{n+1}.$$

   a) Probar que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ es Markov. ¿Cuál es el espacio de estados?

   b) ¿Cómo deben ser las $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para recuperar el proceso de ramificación estándar?

   c) Si ξ_1^1 es Bernoulli de parámetro p y I_1 es Poisson de parámetro λ, hallar una (la) distribución invariante. ¿Es reversible?

[1] Estos modelos (en realidad el de Ehrenfest, pero el de Bernouli-Laplace hubiera servido igual) fueron introducidos por Paul y Tatiana Ehrenfest para explicar la segunda ley de la termodinámica en defensa de las ideas de Boltzmann. Buscaban explicar la paradoja de Loschmidt (1876) que afirmaba que si un sistema es reversible no es posible que la entropía siempre crezca: si un movimiento de t_1 a t_2 hace crecer la entropía, como el movimiento reverso es igualmente posible, este movimiento debería hacer decrecer la entropía. Meditar sobre esto.

[2] Este proceso fue introducido por M. Smoluchowski como un modelo para la fluctuación en la cantidad de partículas en un elemento de volumen v dentro de un volumen mucho más grande de una solución que contiene partículas en movimiento.