Práctica 5

Martingalas a tiempo discreto

1. Tiempos de Parada

A lo largo de esta sección vamos a fijar un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ junto con una filtración $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida en este espacio.

Definición. Una variable aleatoria $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup +\infty$ se dice un *tiempo de parada* con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si para todo $n \in \mathbb{N}$ el evento $\{\tau \leq n\}$ pertenece a $\mathcal{F}_n$.

1. Mostrar que τ es un tiempo de parada si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$ el evento $\{\tau = n\}$ pertenece a $\mathcal{F}_n$.
2. Mostrar que $\tau_m \equiv m$ es un tiempo de parada para todo $m \in \mathbb{N}$.
3. Mostrar que si $k \in \mathbb{N}$ y τ es un tiempo de parada entonces $\tau + k$ también lo es.
4. Mostrar que si τ y ρ son tiempos de parada entonces $\tau \wedge \rho$, $\tau \vee \rho$ y $\tau + \rho$ también lo son.
5. Mostrar que si $(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de tiempos de parada entonces $\sup_{k \in \mathbb{N}} \tau_k$ también lo es.
6. Mostrar que todo tiempo de parada es límite puntual de tiempos de parada acotados.
7. Probar que si τ es un tiempo de parada finito y $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es un proceso estocástico entonces X_τ es una variable aleatoria.

Definición. Sea τ un tiempo de parada para la filtración $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Definimos la clase

$$\mathcal{F}_\tau := \left\{ A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

1. Mostrar que $\mathcal{F}_\tau$ es una σ -álgebra y que τ es $\mathcal{F}_\tau$ -medible. ¿Es cierto que $\sigma(\tau) = \mathcal{F}_\tau$?
2. Mostrar que $A \in \mathcal{F}_\tau$ si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$ el evento $A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$.
3. Probar que si τ_1 y τ_2 son tiempos de parada entonces para todo $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$ se tiene $A \cap \{\tau_1 \leq \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_2}$. Deducir que si $\tau_1 \leq \tau_2$ en Ω entonces $\mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_2}$.
4. Probar que si τ_1 y τ_2 son tiempos de parada entonces $\mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} = \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$ y que los conjuntos

$$\{\tau_1 < \tau_2\}, \{\tau_2 < \tau_1\}, \{\tau_1 \leq \tau_2\}, \{\tau_2 \leq \tau_1\} \text{ y } \{\tau_1 = \tau_2\}$$

pertenecen a $\mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2}$.

5. Sea τ_0 un tiempo de parada y sea $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ una variable aleatoria tal que $\tau_0 \leq \tau$ en Ω . Mostrar que si τ es $\mathcal{F}_{\tau_0}$ -medible entonces es un tiempo de parada.
6. Sean τ_1 y τ_2 tiempos de parada y sea Z una variable aleatoria integrable. Probar que
 - a) $\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_{\tau_1}) = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2})$ en casi todo punto de $\{\tau_1 \leq \tau_2\}$.
 - b) $\mathbb{E}[\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_{\tau_1})|\mathcal{F}_{\tau_2}] = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2})$.

2. Generalidades

1. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un proceso integrable a valores en un conjunto numerable $E \subset \mathbb{R}$. Mostrar que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una martingala con respecto a su filtración natural si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$ y toda elección de estados $i_1, \dots, i_n \in E$ que verifique $P(X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) > 0$ se tiene que $\mathbb{E}(X_{n+1}|X_1 = i_0, \dots, X_n = i_n) = i_n$.
2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Probar que la familia

$$\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) : \mathcal{G} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra contenida en } \mathcal{F}\}$$

es uniformemente integrable.

3. Mostrar la desigualdad maximal para $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una supermartingala no negativa. Esto es, dado $a > 0$ se tiene la siguiente desigualdad

$$aP\left(\max_{0 \leq k \leq n} X_k \geq a\right) \leq \mathbb{E}(X_0).$$

4. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una martingala uniformemente integrable y sean τ_1 y τ_2 tiempos de parada tales que $\tau_1 \leq \tau_2$ en Ω .
 - a) Probar que X_{τ_1} y X_{τ_2} son variables aleatorias integrables.
 - b) Probar que $\mathbb{E}(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}) = X_{\tau_1}$.
 - c) Mostrar que la hipótesis de integrabilidad uniforme es innecesaria para probar los dos items anteriores si los tiempos de parada son acotados.
5. Sean $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una martingala y $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $\mathbb{E}(|\phi(X_n)|) < +\infty$. Probar que $(\phi(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es una submartingala.
6. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ una filtración en este espacio. Mostrar que un proceso integrable y adaptado $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ es una martingala si y sólo si para cualquier tiempo de parada acotado T se tiene $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.
7. Sea T un tiempo de parada con respecto a una filtración $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que para algún $N \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ satisface

$$P(T \leq N + n | \mathcal{F}_n) \geq \varepsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostrar que $\mathbb{E}(T) < +\infty$.

3. Convergencia de Martingalas

1. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. definidas sobre un mismo espacio de probabilidad con

$$P(X_1 = 0) = P(X_1 = 2) = \frac{1}{2}.$$

Sea

$$Y_n = \prod_{i=1}^n X_i.$$

Probar que Y_n es una martingala para la filtración generada y que incluso tiene límite en casi todo punto pero que no existe variable aleatoria Y tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $Y_n = E(Y|\mathcal{F}_n)$. ¿Puede ser uniformemente integrable $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

2. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución dada por

$$P(X_n = -n^2) = \frac{1}{n^2} \quad \text{y} \quad P\left(X_n = \frac{n^2}{n^2 - 1}\right) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Sea $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Mostrar que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 1$ en casi todo punto. Deducir que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una martingala que converge a $+\infty$. ¿Es uniformemente integrable?

3. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ una martingala en L^2 .

- a) Mostrar que los incrementos $(X_{n+1} - X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ son ortogonales.
 b) Concluir que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una martingala acotada en L^2 si y sólo si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2] < +\infty.$$

- c) Mostrar que toda martingala acotada en L^2 tiene límite en este espacio sin apelar al teorema de convergencia de martingalas.

4. Consideremos el espacio de probabilidad $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), P)$ donde P es la medida de Lebesgue. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$\mathcal{F}_n := \sigma\left(\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right] : j = 0, \dots, 2^n - 1\right)$$

y definamos las variables aleatorias X_n según la fórmula

$$X_n = 2^n \mathbb{1}_{[0, 2^{-n}]}$$

Observar que el proceso definido corresponde a la estrategia “ganadora” de doblar la apuesta hasta recuperar las pérdidas. ¿Le resulta similar a algún otro modelo de esta práctica?

- a) Probar que X_n es una martingala respecto a la filtración $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 b) Calcular $\mathbb{E}(X_n)$ y $\mathbb{E}(\max_{1 \leq k \leq n} X_k)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
 c) Concluir que no existe $C > 0$ tal que $\mathbb{E}(\max_{1 \leq k \leq n} X_k) \leq C \mathbb{E}(X_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que, por lo tanto, la desigualdad de Doob no puede valer para $p = 1$.

4. Aplicaciones

1. Sea $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un proceso de ramificación que se ramifica según $(\xi_i^j)_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$. Sea m la cantidad esperada de hijos de cada generación, i.e., $m = \mathbb{E}(\xi)$. Supongamos además que la familia $(\xi_i^j)_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ está en L^2 .
 - a) Probar que $M_n := \frac{Z_n}{m^n}$ converge en L^2 si y sólo si $m > 1$.
 - b) Si $m > 1$ probar que los eventos $\{M_\infty > 0\}$ y $\{\lim Z_n = \infty\}$ coinciden salvo un evento de probabilidad nula, donde $M_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$ en casi todo punto.
 - c) Mostrar que el proceso $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no es uniformemente integrable si $m = 1$.
2. Nos disponemos a probar nuestra suerte en un juego de azar en donde la ganancia por unidad apostada en el n -ésimo juego es ε_n donde $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución dada por

$$P(\varepsilon_n = 1) = p \quad \text{y} \quad P(\varepsilon_n = -1) = q$$

donde $p + q = 1$. Nuestra apuesta en el n -ésimo juego C_n tiene que estar entre 0 y Z_{n-1} , donde Z_{n-1} es nuestra fortuna al instante $n - 1$. El objetivo es maximizar la "tasa de interés" esperada $\mathbb{E}[\log(Z_N/Z_0)]$ donde N es un natural dado que representa la longitud del juego y Z_0 , nuestra fortuna a tiempo 0, es una constante dada. Sea $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la filtración generada por la sucesión $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Mostrar que si C es cualquier estrategia previsible entonces $\log Z_n - n\alpha$ es un supermartingala, donde α denota la *entropía*

$$\alpha = p \log p + q \log q + \log 2$$

de modo que $\mathbb{E}[\log(Z_N/Z_0)] \leq N\alpha$ pero que, para una determinada estrategia, $\log Z_n - n\alpha$ resulta una martingala. ¿Cuál es la mejor estrategia?

3. **Urna de Polya.** Se tiene una urna que contiene originalmente dos bolillas, una blanca y otra negra. Se extrae al azar una bolilla de la urna y se la devuelve a la urna junto con otra bolilla del mismo color. El procedimiento se repite indefinidamente teniendo, luego de n pasos, $n + 2$ bolillas en la urna de las cuales $B_n + 1$ son negras y $n + 1 - B_n$ son blancas.
 - a) Sea $M_n = \frac{B_n+1}{n+2}$ la proporción de bolillas negras en la urna a tiempo n . Mostrar que M es una martingala. Probar que converge en casi todo punto y en L^p para todo $p \geq 1$ a una variable aleatoria M_∞ con valores en el $[0, 1]$.
 - b) Mostrar que para cada $k \in \mathbb{N}$ el proceso M^k definido por

$$M_n^k = \frac{(B_n + 1)(B_n + 2) \dots (B_n + k)}{(n + 2)(n + 3) \dots (n + k + 1)}$$

es una martingala. Deducir el valor de $\mathbb{E}(M_\infty^k)$ y concluir la ley de M_∞ .

- c) Obtener el resultado del item anterior probando que $P(B_n = k) = \frac{1}{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq k \leq n$.
 - d) Mostrar que para cada $0 < \theta < 1$, el proceso N^θ definido por

$$N_n^\theta = \frac{(n+1)!}{B_n!(n-B_n)!} \theta^{B_n} (1-\theta)^{n-B_n}$$

es una martingala.

4. **Urna de Bayes.** Sea U una variable aleatoria con distribución uniforme en $[0, 1]$ y sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias tales que, condicionadas a U , son independientes con distribución Bernoulli de parámetro U . Sea $\tilde{B}_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

- Mostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$ el vector $(\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_n)$ tiene la misma distribución que el vector $(B_1, \dots, B_n)$ en la urna de Polya.
- Mostrar que N_n^θ es una densidad condicional de U dado el vector $(\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_n)$.

5. **ABRACADABRA.** Un mono que consiguió una máquina de escribir decide hacer su aporte a la literatura moderna. A cada instante de tiempo n el mono elige una letra al azar entre las 26 del alfabeto romano y la escribe en su hoja. Justo antes de cada tiempo n un nuevo apostador llega para presenciar la creación del mono y apuesta una moneda a que

la n -ésima letra escrita por el mono será A .

Si pierde, se retira. De lo contrario, recibe 26 monedas de premio las cuales apuesta todas a que

la $(n + 1)$ -ésima letra escrita por el mono será B .

Si pierde, se retira. De lo contrario, apuesta toda su fortuna actual de 26^2 monedas a que

la $(n + 2)$ -ésima letra escrita por el mono será R

y así a lo largo de la secuencia ABRACADABRA. Sea T el primer instante de tiempo en que el mono consigue escribir la secuencia consecutiva ABRACADABRA.

- Probar que $\mathbb{E}(T) = 26^{11} + 26^4 + 26$. Interpretar.
- ¿Porqué $\mathbb{E}(T)$ es mayor al tiempo esperado que le lleva al mono escribir por primera vez la secuencia ABRACADABRA?

6. **Ruina del jugador.** Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución dada por

$$P(X = 1) = p \quad \text{y} \quad P(X = -1) = q$$

donde $0 < p = 1 - q < 1$ y $p \neq q$. Sean a y b números naturales con $a < b$. Definimos

$$S_n = a + X_1 + \dots + X_n \quad \text{y} \quad T = \inf\{n : S_n = 0 \text{ ó } S_n = b\}.$$

Además, consideramos los procesos M y N como

$$M_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \quad \text{y} \quad N_n = S_n - (p - q)n$$

para $n \in \mathbb{N}$.

- Probar que M y N son martingalas con respecto a la filtración natural de S .
- Calcular $P(S_T = 0)$ y $\mathbb{E}(S_T)$.
- ¿Qué sucede si $p = q$?