Práctica 2

Teorema de extensión de Kolmogorov

1. Extensión a $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

1.1. Propiedades del espacio producto

1. Sea en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la métrica dada por

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\left(\frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}\right).$$

Demuestre que d induce la topología producto sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$ resulta un espacio métrico completo y separable.

2. Demuestre que las siguientes σ-álgebras coinciden en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Esta clase de conjuntos recibirá el nombre de *borelianos* de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y la denotaremos por $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

   a) $\mathcal{F}_1 = \sigma\Big(G : G \text{ abierto de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\Big)$

   b) $\mathcal{F}_2 = \sigma\Big(\pi_i : i \in \mathbb{N}\Big)$ donde $\pi_i : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ es la i-ésima proyección canónica

   c) $\mathcal{F}_3 = \sigma\Big(\Pi_{1n} : n \geq 1\Big)$ donde $\Pi_{1n} : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^n$ está dada por la fórmula

$$\Pi_{1n}(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

3. Sea $\mathcal{A}$ la clase de los *cilindros finito-dimensionales* definida como

$$\mathcal{A} = \{\Pi_{1n}^{-1}(A_n) : n \in \mathbb{N} \text{ y } A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Pruebe que $\mathcal{A}$ es un álgebra de conjuntos sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Deduzca que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ puede ser vista también como la σ-álgebra generada por los cilindros finito-dimensionales, i.e. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \sigma(\mathcal{A})$.

1.2. Unicidad de la extensión

1. Sean μ y ν dos probabilidades en $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ sean $\mu_{\Pi_{1n}}$ y $\nu_{\Pi_{1n}}$ las medidas inducidas en $\mathbb{R}^n$ por la proyección Π_{1n}. Demuestre que si $\mu_{\Pi_{1n}} = \nu_{\Pi_{1n}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $\mu = \nu$. Deducir que en el Teorema de Extensión de Kolomogorov la extensión a una medida sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es única.

1.3. Existencia de medidas en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ por extensión de Kolmogorov

1. Dada una familia numerable $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de probabilidades en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ demuestre que existe una única probabilidad μ en $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$ tal que las proyecciones canónicas resultan variables aleatorias independientes y para cada $i \in \mathbb{N}$ la proyección π_i tiene distribución P_i.

1.4. Construcción de medidas en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

1. Construir sobre el intervalo $[0,1]$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución Bernoulli de parámetro $\frac{1}{2}$.

2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad en donde se tiene una sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aleatorias independientes con distribución Bernoulli de parámetro $\frac{1}{2}$.

   a) Probar que $X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{2^n}$ es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $[0,1]$.

   b) A partir del item anterior construir una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución uniforme en el intervalo $[0,1]$.

   c) Dada una familia numerable $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de distribuciones sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ construir una sucesión de variables aleatorias independientes $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $P_{Z_n} = P_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ *sin* apelar al Teorema de Extensión de Kolmogorov.

3. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad en donde se tiene una sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aleatorias independientes con distribución Bernoulli de parámetro $\frac{1}{2}$. Probar que $X = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2X_i}{3^i}$ es una variable aleatoria cuya función de distribución acumulada es la de Cantor-Lebesgue.

2. Extensión a $\mathbb{R}^T$

Denotamos por $\mathbb{R}^T$ al espacio de funciones a valores reales con dominio T.

Definición. Un *cilindro n-dimensional* en $\mathbb{R}^T$ es un conjunto de la forma

$$C = \Big\{\omega \in \mathbb{R}^T : (\omega(t_1), \ldots, \omega(t_n)) \in A\Big\}$$

donde $t_i \in T$ para todo $1 \leq i \leq n$ y $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Notamos por $\mathcal{B}^*(\mathbb{R}^T)$ a la σ-álgebra generada por los cilindros finito-dimensionales en $\mathbb{R}^T$.

Denotamos por $\tilde{T}$ al conjunto de vectores de longitud finita y coordenadas en T. Para $\tilde{t} \in \tilde{T}$ indicaremos por $|\tilde{t}|$ a la longitud del vector $\tilde{t}$.

Definición. Una *familia de distribuciones finito-dimensionales sobre* $\tilde{T}$ es una colección $(Q_{\tilde{t}})_{\tilde{t}\in\tilde{T}}$ de medidas de probabilidad donde para cada $\tilde{t} \in \tilde{T}$ la probabilidad $Q_{\tilde{t}}$ está definida sobre $(\mathbb{R}^{|t|}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{|t|}))$.

Definición. Una familia de distribuciones finito-dimensionales $(Q_{\tilde{t}})_{\tilde{t}\in\tilde{T}}$ se dice *consistente* si verifica las siguientes condiciones:

(*a*) Si $\tilde{s} = (t_{i_1}, \ldots, t_{i_n})$ es una permutación de $\tilde{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ entonces para cualquier $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ con $1 \leq i \leq n$ vale

$$Q_{\tilde{t}}\Big(\prod_{i=1}^{n} A_j\Big) = Q_{\tilde{s}}\Big(\prod_{j=1}^{n} A_{i_j}\Big)$$

(b) Si $\tilde{t} = (t_1, \ldots, t_{n+1})$, $\tilde{s} = (t_1, \ldots, t_n)$ y $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$Q_{\tilde{t}}(A \times \mathbb{R}) = Q_{\tilde{s}}(A).$$

Teorema (Extensión de Kolmogorov en $\mathbb{R}^T$). Sea $(Q_{\tilde{t}})_{\tilde{t} \in \tilde{T}}$ una familia consistente de distribuciones finito-dimensionales. Entonces existe una única medida de probabilidad P definida sobre $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}^*(\mathbb{R}^T))$ tal que para todo $\tilde{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \tilde{T}$ y $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$Q_{\tilde{t}}(A) = P\Big(\omega \in \mathbb{R}^T : (\omega(t_1), \ldots, \omega(t_n)) \in A\Big).$$

1. Sea $(X_t)_{t \in T}$ una familia de funciones a valores reales definidas sobre un conjunto Ω.

    a) Probar que si $B \in \sigma(X_t : t \in T)$ y $\omega \in B$ entonces para todo $\omega' \in \Omega$ tal que $X_t(\omega) = X_t(\omega')$ para todo $t \in T$ se tiene que $\omega' \in B$.

    b) Mostrar que
    $$\mathcal{G} = \bigcup_{J \prec T} \sigma(X_t : t \in J)$$
    es una σ-álgebra, donde $J \prec T$ denota $J \subseteq T$ y J es a lo sumo numerable. Deducir que $\mathcal{G} = \sigma(X_t : t \in T)$.

    c) Concluir que $\mathcal{B}^*(\mathbb{R}^T) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ pero que la igualdad vale si y sólo si T es numerable.

    d) Mostrar que si T es un intervalo de la recta entonces el conjunto de funciones continuas $C(T)$ no es un elemento de $\mathcal{B}^*(\mathbb{R}^T)$. Más aún, mostrar que el único subconjunto de $C(T)$ contenido en $\mathcal{B}^*(\mathbb{R}^T)$ es el conjunto vacío.

    e) Mostrar que el conjunto
    $$\mathcal{N} = \Big\{\omega \in \mathbb{R}^{[0,+\infty)} : \omega(s) \leq \omega(t) \text{ si } s \leq t\,,\ \omega(t) \in \mathbb{N}_0 \text{ para todo } t\Big\}$$
    no pertenece a $\mathcal{B}^*(\mathbb{R}^{[0,+\infty)})$.