

Práctica 1

Medida Producto

A lo largo de esta guía fijaremos dos espacios de medida σ -finita $(X, \mathcal{M}_X, \mu)$ y $(Y, \mathcal{M}_Y, \nu)$.

1. Sea en el producto cartesiano $X \times Y$ la clase $\mathcal{R}$ de rectángulos

$$\mathcal{R} = \{A \times B : A \in \mathcal{M}_X, B \in \mathcal{M}_Y\}.$$

Demuestre que la clase $\mathcal{A}$ formada por finitas uniones disjuntas de elementos de $\mathcal{R}$ constituye un álgebra.

Definición. Definimos la σ -álgebra *producto* como la menor σ -álgebra que contiene a la clase de rectángulos $\mathcal{R}$. La denotaremos por $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$.

2. Demuestre que si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}, (C_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_X$ y $(B_i)_{1 \leq i \leq n}, (D_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_Y$ son familias de conjuntos tales que

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \times B_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \times D_j$$

donde la unión es disjunta en cada caso entonces vale

$$\sum_{i=1}^n \mu(A_i) \nu(B_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(C_j) \nu(D_j).$$

3. Sea la aplicación $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ definida por la fórmula

$$\pi\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \times B_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \nu(B_i)$$

donde la unión es disjunta. Mostrar que π está bien definida y que es σ -aditiva.

Notar que como μ y ν son σ -finitas también lo es la aplicación π . Por el Teorema de Extensión de Caratheodory-Hahn podemos extender a π a una medida definida sobre todo $\mathcal{M}_X \otimes \mathcal{M}_Y$ que denotaremos por $\mu \otimes \nu$. Observar que $\mu \otimes \nu$ es la única medida definida sobre $\mathcal{M}_X \otimes \mathcal{M}_Y$ tal que

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \nu(B)$$

para todo $A \in \mathcal{M}_X$ y $B \in \mathcal{M}_Y$. Por este motivo la medida $\mu \otimes \nu$ recibe el nombre de *medida producto* sobre $X \times Y$.

4. **Principio de Cavalieri.** Demuestre que para todo $A \in \mathcal{M}_X \otimes \mathcal{M}_Y$ las secciones

$$A_x := \{y \in Y : (x, y) \in A\}$$

$$A_y := \{x \in X : (x, y) \in A\}$$

son medibles y que además vale

$$(\mu \otimes \nu)(A) = \int \mu(A_y) d\nu = \int \nu(A_x) d\mu.$$

5. **Teorema de Fubini-Tonelli.** Sea $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ una función medible no negativa. Para $y \in Y$ y $x \in X$ definimos las aplicaciones $f_y : X \rightarrow [0, +\infty]$ y $f_x : Y \rightarrow [0, +\infty]$ como

$$f_y(x) = f(x, y) = f_x(y).$$

- a) Probar que para todo $y \in Y$ y $x \in X$ las aplicaciones f_y y f_x son medibles.
b) Probar que las aplicaciones

$$x \rightarrow \int_Y f_x(y) d\nu$$

$$y \rightarrow \int_X f_y(x) d\mu$$

son medibles.

- c) Probar que

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \otimes \nu) = \int_Y \left[\int_X f_y(x) d\mu \right] d\nu = \int_X \left[\int_Y f_x(y) d\nu \right] d\mu.$$

6. **Teorema de Fubini.** Sea $f : X \times Y \rightarrow [-\infty, +\infty]$ una función integrable respecto de $\mu \otimes \nu$.

- a) Probar que f_y es integrable para casi todo $y \in Y$ con respecto a la medida ν y que f_x es integrable para casi todo $x \in X$ con respecto a la medida μ .
b) Probar que las aplicaciones

$$x \rightarrow \begin{cases} \int_Y f_x(y) d\nu & \text{si } \int_Y |f_x(y)| d\nu < +\infty \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$y \rightarrow \begin{cases} \int_X f_y(x) d\mu & \text{si } \int_X |f_y(x)| d\mu < +\infty \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

son integrables.

- c) Probar que

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \otimes \nu) = \int_Y \left[\int_X f_y(x) d\mu \right] d\nu = \int_X \left[\int_Y f_x(y) d\nu \right] d\mu.$$