ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Segundo cuatrimestre 2010

Práctica 7 - Diagonalización

1. Hallar los autovalores y bases de los respectivos autoespacios para cada una de las siguientes matrices:

   (a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

   (g) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (i) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. Determinar si cada una de las matrices A del ejercicio 1 es o no diagonalizable. En los casos en que sí lo sea, hallar una base de autovectores de A y una matriz inversible C que diagonalice a A (es decir, tal que $C^{-1} \cdot A \cdot C$ sea diagonal).

3. Mostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ no es diagonalizable cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{R}$ con tal que $b \neq 0$.

4. Sea $A = \begin{pmatrix} r & s & t \\ -12 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $v = (1, 2, 0)$, $w = (2, 6, 0)$ y $u = (-2, -2, -1)$ son autovectores de A.

   (a) Probar que A es diagonalizable.

   (b) Calcular los autovalores de A y determinar los valores de r, s y t.

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Probar que A es diagonalizable y hallar una matriz inversible C que diagonalice a A.

   (b) Calcular A^{10}.

6. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y sea $v = (1, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Probar que A es diagonalizable y hallar una matriz inversible C que diagonalice a A.

   (b) Calcular $A^6 \cdot v^t$ utilizando la diagonalización de A.

   (c) Escribir al vector v como combinación lineal de una base de $\mathbb{R}^3$ de autovectores de A.

   (d) Calcular nuevamente $A^6 \cdot v^t$ sin utilizar la diagonalización de A.

7. Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y sea $v = (-2, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Hallar los autovalores de A y los autovectores asociados.
   (b) Probar que A **no** es diagonalizable.
   (c) Escribir al vector v como combinación lineal de autovectores de A.
   (d) Calcular $A^{63} \cdot v^t$.

8. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

   (a) Hallar todos los valores de $b \in \mathbb{R}$ para los cuales $\lambda = 3$ es autovalor de A.
   (b) Para cada b hallado, dar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que A **no** es diagonalizable.

9. Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **no** es diagonalizable.

10. Sea $A = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ a+2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

    (a) Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que A **no** es diagonalizable.
    (b) Para cada a hallado, dar todos los $b \in \mathbb{R}$ tales que $(0, b^2+1, 2)$ es autovector de A.

11. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\lambda = 1$ es autovalor de A y $(1,1,1) \in N(I - A)$.

    (a) Determinar a, b y c y hallar todos los autovalores de A.
    (b) ¿Es A diagonalizable?
    (c) Calcular A^{100} y A^{201}.

12. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Hallar los autovalores y autovectores de A, A^3 y A^9.

13. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz con autovalores $\{0, 1, 5\}$.

    (a) Determinar si A es inversible y/o diagonalizable.
    (b) Calcular los autovalores de $B = (3A - 4I)^3$ y $C = 5A^t + 4I$.
    (c) Probar que $H = A + I$ es inversible y calcular los autovalores de H^{-1}, $\det(H^{-1})$ y $\mathrm{tr}(H^{-1})$.
    (d) Hallar todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales $\alpha A + 3I$ no es inversible.

14. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $\{1, 2, 3\}$ son las raíces de χ_A. Sea $B = 5A^2 + 3A - 2I$. Calcular $\det(B)$ y $\mathrm{tr}(B)$.

15. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $\lambda = 1$ es autovalor de A, $\operatorname{tr}(A) = 2$ y $\det(A) = -2$.

    (a) Hallar **todos** los autovalores de A.

    (b) Decidir si A^t es o no diagonalizable.

16. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $\dim(N(A)) = 1$, $\operatorname{rg}(A + 2I) = 2$ y $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$.

    (a) Calcular los autovalores de A.

    (b) Decidir si A es inversible y/o diagonalizable.

17. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz inversible tal que $\operatorname{tr}(A) = -2$, $\operatorname{rg}(A^{-1} - \frac{1}{2}I) < 3$ y $\chi_A(1) = -8$. Probar que A es diagonalizable.

18. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ una matriz tal que $N(A + I) \neq \{0\}$, $\operatorname{rg}(A - 2I) \leq 2$ y $\chi_A(1) = -4$. Decidir si A es diagonalizable y calcular $A^3 - 4A^2 + A + 6I$.

19. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Probar que:

    (a) $A^4 = 7A^3 - 17A^2 + 5A + 6I$.

    (b) $A^5 - 6A^4 = -10A^3 - 12A^2 + 11A + 6I$.