

Ecuación del Calor

1. Sea u una solución regular de $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$.
 - (a) Mostrar que $u_\lambda(x, t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ también resuelve la ecuación del calor para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - (b) Mostrar que $v(x, t) = x \cdot \nabla u(x, t) + 2tu_t(x, t)$ también resuelve la ecuación del calor.
2. Verificar las siguientes afirmaciones indicando en cada caso las hipótesis de regularidad sobre u necesarias para su validez.
 - (a) *Combinaciones lineales:* Si u_1 y u_2 son funciones calóricas, entonces $\alpha u_1 + \beta u_2$ es calórica.
 - (b) *Traslaciones:* Si $u(x, t)$ es calórica, entonces $u(x - \xi, t - \tau)$ es calórica.
 - (c) *Diferenciación respecto a parámetros:* Si $u(x, t, \alpha)$ es calórica para cada α , entonces $\frac{\partial u}{\partial \alpha}(x, t, \alpha)$ es calórica para cada α .
 - (d) *Integración respecto a parámetros:* Si $u(x, t, \alpha)$ es calórica para cada α , entonces $\int_a^b u(x, t, \alpha) d\alpha$ es calórica.
 - (e) *Diferenciación respecto a x y t :* Si $u(x, t)$ es calórica, entonces $\frac{\partial^{|\alpha|+m} u}{\partial x^\alpha \partial t^m}(x, t)$ es calórica.
 - (f) *Integración respecto x y t :* Si $u(x, t)$ es calórica, $n = 1$, entonces $\int_{x_0}^x u(\xi, t) d\xi$ es calórica si $u_x(x_0, t) = 0$ y $\int_a^t u(x, \tau) d\tau$ es calórica si $u(x, a) = 0$.
 - (g) *Convoluciones:* Si $u(x, t)$ es calórica, entonces $\int u(x - \xi, t) \varphi(\xi) d\xi$ y $\int_a^b u(x, t - \tau) \varphi(\tau) d\tau$ son calóricas.
3. (a) Si $\phi = \phi(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$, es una solución con simetría esférica de la ecuación del calor en \mathbb{R}^3 (i.e. $\phi(x, t) = w(|x|, t)$ con $w : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$), entonces ϕ satisface

$$\phi_{rr} + \frac{2}{r}\phi_r = \phi_t \quad t > 0, r > 0. \tag{1}$$

- (b) Mostrar que la ecuación (1) puede reducirse mediante el cambio $\psi = r\phi$ a la ecuación del calor unidimensional.
4. Para $i = 1, \dots, n$ consideramos $u_i = u_i(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, soluciones de

$$\begin{cases} (u_i)_t = (u_i)_{xx} \\ u_i(x, 0) = \varphi_i(x). \end{cases}$$

Probar que si definimos para $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$,

$$u(x, t) = u_1(x_1, t)u_2(x_2, t)\dots u_n(x_n, t)$$

$$\varphi(x) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\dots\varphi_n(x_n)$$

entonces u es solución de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ con $u(x, 0) = \varphi(x)$.

5. Sea

$$u(x, t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \quad (x \in \mathbb{R}^N, t > 0),$$

donde α y β son constantes.

- (a) Verificar que u satisface la ecuación del calor si y sólo si v satisface

$$\alpha t^{-(\alpha+1)}v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)}y \cdot Dv(y) + t^{-(\alpha+2\beta)}\Delta v(y) = 0,$$

para $y = t^{-\beta}x$.

- (b) Verificar que si $\beta = 1/2$, v satisface

$$\alpha v + \frac{1}{2}y \cdot Dv + \Delta v = 0.$$

(c) Verificar que si v es radial, i.e. $v(y) = w(|y|)$ para $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces w satisface

$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0,$$

donde $r = |y|$, $' = \frac{d}{dr}$.

(d) Tomar $\alpha = n/2$ y hallar la solución fundamental de la ecuación del calor.

6. *Método de similitud.*

(a) Hallar todas las soluciones de la ecuación del calor unidimensional que satisfacen

$$\phi(x, t) = \phi(\lambda x, \lambda^2 t), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) Mostrar que el método de similitud dado en (a) también puede aplicarse a la ecuación del calor no lineal

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad K \in C^1.$$

7. (a) Sea $a(t) > 0$ una función continua y sea $u(x, t)$ una solución regular de $u_t = a \Delta u$. Muestre que existe un cambio de variables $t = \phi(\tau)$ tal que $U(x, \tau) = u(x, \phi(\tau))$ es solución de la ecuación del calor.

(b) Sea $b(t) \in \mathbb{R}^n$ continua y sea $u(x, t)$ solución regular de $u_t = \Delta u + b \cdot \nabla u$. Muestre que existe un cambio de variables $x = \psi(y, t)$ tal que $U(y, t) = u(\psi(y, t), t)$ es solución de la ecuación del calor.

(c) Sea $c(t) \in \mathbb{R}$ continua y sea $u(x, t)$ solución regular de $u_t + cu = \Delta u$. Muestre que existe $\varphi(t)$ derivable, tal que $U(x, t) = u(x, t)\varphi(t)$ es solución de la ecuación del calor.

8. *Principio de Duhamel*

Sea u la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = g(x, t) & \text{en } (0, L) \times (0, +\infty), \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{en } t > 0, \\ u(x, 0) = 0 & \text{en } (0, L). \end{cases}$$

Probar que u puede ser representada en la forma

$$u(x, t) = \int_0^t \Phi(x, t; s) ds,$$

donde Φ es la solución del problema

$$\begin{cases} \Phi_t - \Phi_{xx} = 0 & \text{en } (0, L) \times (s, +\infty), \\ \Phi(0, t; s) = \Phi(L, t; s) = 0 & \text{en } t > s, \\ \Phi(x, s; s) = g(x, s) & \text{en } (0, L). \end{cases}$$

9. Usar la transformada de Fourier para resolver el problema

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = g(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde f y $g(\cdot, t)$ para cada t fijo, son funciones de \mathcal{S} .

10. Mostrar que la solución acotada de

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases}$$

viene dada por la fórmula

$$u(x, t) = \int_0^\infty G(x, \xi, t) f(\xi) d\xi,$$

donde $G(x, \xi, t) = K(x - \xi, t) - K(x + \xi, t)$ y K es la solución fundamental de la ecuación del calor. (Pista: Extender f por imparidad a $-\infty < x < 0$ y resolver el problema de valores iniciales para la f extendida.)

11. Mostrar que la solución acotada de

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = g(t), \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases}$$

viene dada por la fórmula

$$u(x, t) = \int_0^\infty G(x, \xi, t) f(\xi) d\xi - 2 \int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x, t - \tau) g(\tau) d\tau,$$

donde $G(x, \xi, t) = K(x - \xi, t) - K(x + \xi, t)$ y K es la solución fundamental de la ecuación del calor, si

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq C_1 \exp\{C_2|x|^{1+\alpha}\}, & 0 \leq \alpha < 1, \\ |g(t)| &\leq C_1 t^{-\alpha}, & 0 < t < \varepsilon \end{aligned}$$

donde C_1, C_2 son constantes positivas y $\varepsilon > 0$.

12. Sea $u(x, t)$ solución del problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

dada por la convolución de φ en la variable x con la solución fundamental. Probar que si $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $u(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}) \forall t > 0$ y

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx, \quad \forall t > 0.$$

13. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Notamos $U_T = U \times (0, T]$ y $\Gamma_T = (\overline{U} \times \{0\}) \cup (\partial U \times [0, T])$ la frontera parabólica de U_T . Decimos que $v \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ es una *subsolución* de la ecuación del calor si

$$v_t - \Delta v \leq 0 \text{ en } U_T.$$

(a) Probar que

$$\max_{\overline{U_T}} v = \max_{\Gamma_T} v.$$

(b) Sea $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un función suave y convexa. Probar que si u es solución de la ecuación del calor y $v = \phi(u)$, entonces v es una subsolución.

(c) Probar que $v = |\nabla u|^2 + u_t^2$ es una subsolución si u es una solución de la ecuación del calor.

14. Sea $U_T = U \times (0, T]$ y sean u_n soluciones regulares del siguiente problema

$$\begin{cases} (u_n)_t - \Delta u_n = 0 & \text{en } U_T \\ u_n = f_n & \text{en } \Gamma_T, \end{cases}$$

donde Γ_T es la frontera parabólica de U_T . Probar que si $f_n \rightarrow f$ uniformemente en Γ_T , entonces existe u regular tal que $u_n \rightarrow u$ uniformemente sobre U_T y u es solución de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } U_T \\ u = f & \text{en } \Gamma_T. \end{cases}$$

15. Sea u una solución acotada de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^N \times (-\infty, T]$. Probar que u es constante. ¿Es cierto el resultado si eliminamos la hipótesis que u sea acotada?

16. Definimos

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

donde los coeficientes a_{ij}, b_i son continuos, $a_{ij} = a_{ji}$ y la matriz $A = (a_{ij})$ es definida positiva. Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, conexo y acotado, definimos $U_T = U \times (0, T]$ y $\Gamma_T = \overline{U_T} - U_T$ la frontera parabólica de U_T . Probar que si $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ satisface

$$u_t - \mathcal{L}u = 0 \text{ en } U_T,$$

entonces

$$\max_{\overline{U_T}} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

17. Con la notación del ejercicio anterior, sea $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ la solución de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x) & \text{en } U_T, \\ u = 0 & \text{en } \Gamma_T. \end{cases}$$

Probar que si $f \leq 0$, entonces $u_t \leq 0$.

(Hint: Definir $w(x, t) = u(x, t + \varepsilon) - u(x, t)$, calcular $w_t - \Delta w$ y aplicar el principio del máximo.)

Ecuación de Ondas

18. Utilizar la transformada de Fourier para resolver el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x, t) & \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 & \text{en } \mathbb{R}. \end{cases}$$

19. Verificar el que cambio de variables $\xi = x + t$, $\eta = x - t$ transforma la ecuación de ondas $u_{tt} - u_{xx} = 0$ en

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Usar este cambio de variables para hallar la fórmula de D'Alembert para la solución de la ecuación de ondas unidimensional.

20. Encontrar una fórmula explícita para la solución de

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & x > 0, t > 0 \\ u(0, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x > 0 \\ u_t(x, 0) = h(x) & x > 0. \end{cases}$$

21. Sea u la solución de la ecuación de ondas

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = g(x) & \text{en } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\} \\ u_t(x, 0) = h(x) & \text{en } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\} \end{cases}$$

dada por la fórmula de Kirchhoff, donde g, h son suaves y tienen soporte compacto. Mostrar que existe una constante C tal que

$$|u(x, t)| \leq \frac{C}{t} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^3, t > 0.$$

22. Se define una solución débil de la ecuación de ondas unidimensional a una función u tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)(\phi_{tt}(x, t) - \phi_{xx}(x, t)) dx dt = 0$$

para toda $\phi \in C_0^2(\mathbb{R}^2)$.

(a) Mostrar que toda solución clásica de la ecuación de ondas unidimensional es una solución débil y que toda solución débil regular de la ecuación de ondas es solución clásica.

(b) Mostrar que las funciones discontinuas

$$u_1(x, t) = H(x - t), \quad u_2(x, t) = H(x + t)$$

donde H es la función de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

son soluciones débiles de la ecuación de ondas unidimensional.

23. Probar que si u es una solución clásica radial de la ecuación de ondas en dimensión 3 (i.e. $u(x, t) = w(|x|, t)$ $x \in \mathbb{R}^3$), se tiene que existen F y G tales que

$$u(x, t) = \frac{F(|x| - t) + G(|x| + t)}{|x|}.$$

24. Sea u la solución clásica de

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{en } B_1(0) \times \{t > 0\} \\ u = 0 & \text{en } \partial B_1(0) \times \{t > 0\} \\ u = f & \text{en } B_1(0) \times \{t = 0\} \\ u_t = g & \text{en } B_1(0) \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Probar que si f y g son radiales entonces u es radial.