Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2010

Práctica 3 – Transformada de Fourier

Notación: Notaremos por $\mathcal{F}[f]$ a la transformada de fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$\mathcal{F}[f](y) = \int f(x)e^{-2\pi ixy}dx.$$

1. Sea $f \in L^1$ y sean $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Si $g(x) = f(x)e^{2\pi i\alpha x}$, entonces $\mathcal{F}[g](y) = \mathcal{F}[f](y - \alpha)$.
   (b) Si $g(x) = f(x - \alpha)$, entonces $\mathcal{F}[g](y) = \mathcal{F}[f](y)e^{-2\pi i\alpha y}$.
   (c) Si $g(x) = f(x/\lambda)$, entonces $\mathcal{F}[g](y) = \lambda^n\mathcal{F}[f](\lambda y)$.
2. Probar que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\mathcal{F}\mathcal{F}[f(x)] = f(-x)$.
3. Probar que la transformada de Fourier de una función f será una función real si y sólo si f es par.
4. Hallar las transformadas de Fourier de las siguientes funciones:
   $\chi_{[-1,1]}$, $\exp(-a|x|)$, $1/(1 + x^2)$.
5. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función L^1. Se definen
   (a) La Transformada-coseno de Fourier como
   $$\mathcal{F}_c[f](y) = \int_0^\infty f(x)\cos(xy)\,dx.$$
   (b) La Transformada-seno de Fourier como
   $$\mathcal{F}_s[f](y) = \int_0^\infty f(x)\sin(xy)\,dx.$$
   Mostrar que si se extiende f como una función par a toda la recta, tenemos
   $$\mathcal{F}[f](y) = 2\mathcal{F}_c[f](2\pi y),$$
   y que si se extiende a f como una función impar, se tiene
   $$\mathcal{F}[f](y) = 2i\mathcal{F}_s[f](2\pi y).$$
6. Sea A una matriz de $n \times n$ no singular. ¿Cómo se relacionan la transformada de Fourier de $f(Ax)$ con la de $f(x)$? ($f \in L^1$). Usar este resultado para mostrar que la transformada de Fourier tranforma funciones radiales en funciones radiales.
7. Probar que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es de soporte compacto, entonces $\mathcal{F}[f] \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
8. Sea $f \in \mathcal{S}$. Probar que $f * f = f$ si y sólo si $f = 0$ a.e.
9. (a) Probar que si ϕ, ϕ' y ϕ'' estan en $L^1(\mathbb{R}) \cap \{g \in C(\mathbb{R}) : \lim_{|x|\to\infty} g(x) = 0\}$ entonces existe $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{F}[f] = \phi$.
   (b) Sea $K \subset \mathbb{R}$ compacto y $U \subset \mathbb{R}$ abierto tal que $K \subset U$. Probar que existe $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{F}[f](y) = 1$ para todo $y \in K$ y $\mathcal{F}[f](y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R} - U$.
   (c) Probar que $\mathcal{F}[L^1(\mathbb{R})]$ es denso en el conjunto de funciones continuas que tienden a cero en el infinito. (Sug.: Stone-Weierstrass)

10. Utilizar la transformade de Fourier para obtener una solucón explícita de la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} & = & 0 & \text{en } \mathbb{R}^2_+ = \{y > 0\}, \\ u(x,0) & = & f(x) & \text{en } \mathbb{R}. \end{cases}$$

11. Utilizar la transformada de Fourier para obtener una solución explícita de la siguiente ecuación:

$$-\Delta u + u = f \qquad \text{en } \mathbb{R}^n,$$

donde $f \in \mathcal{S}$.

12. Idem el ejercicio anterior para la ecuación de Schrödinger

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u & = & 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u & = & g & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

donde u y g son funciones a valores complejos y $g \in L^2$.